Maths 11 N

Devoir surveillé

Jeudi 15 Janvier 2026

Réponses

Question 1

Considérons les droites suivantes:

$\mathcal{D}_1$ d'équation vectorielle : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\mathcal{D}_2$ d'équation vectorielle : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$

1) Parmi les points suivants lesquels appartiennent à $\mathcal{D}_1$ ou à $\mathcal{D}_2$ (compléter le tableau)

Une des réponses (en noir) était donnée à titre d'exemple.

Le point	Appartient à $\mathcal{D}_1$	Appartient à $\mathcal{D}_2$
$A: (8; 3; -1)$	**OUI** : avec $\lambda_1 = 1$	**NON**
$B: (-6; 11; 1)$	**NON**	**OUI** : avec $\lambda_2 = 0$
$C: (0; -4; 13)$	**NON**	**OUI** : avec $\lambda_1 = 3$
$D: (-2; 9; 17)$	**NON**	**NON**
$E: (2; -9; 17)$	**OUI** : avec $\lambda_1 = 7$	**OUI** : avec $\lambda_2 = 4$

Observations :

- A chaque point d'une droite donnée par une *équation vectorielle* correspond une unique valeur du paramètre λ. Cela peut être un nombre entier ou non, positif ou négatif. $(\lambda \in \mathbb{R})$
- Si pour un point donné on ne trouve pas une valeur de λ, cela signifie que le point n'est pas sur la droite.
- La façon la plus simple et rapide d'obtenir un point sur une droite est de choisir $\lambda = 0$.
- Le point E appartient aux deux droites.

2) Un vecteur directeur $\vec{v}_1$ pour $\mathcal{D}_1$ est $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et un vecteur directeur $\vec{v}_2$ pour $\mathcal{D}_2$ est $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$

Observation

Tout multiple d'un vecteur directeur est une vecteur directeur, par exemple, pour $\mathcal{D}_1$: $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -12 \end{pmatrix}$

3) $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ se coupent.

En effet comme point E appartient aux deux droites, elles se rencontrent en E: $(2; -9; 17)$

Observation :

- Un tableau comme celui de la première question n'est généralement pas présent dans les questions d'examens de maturité.
- L'idée de recourir à un tel tableau pour savoir si deux droites se coupent serait très mauvaise. (voyez-vous pourquoi ?) Il est donc important de disposer d'une méthode efficace pour déterminer si deux droites données (dans l'espace) se coupent.

Méthode (vue en classe le je.15 janvier)

Etape 1: On transforme les deux équations sous formes de systèmes à trois équations

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = & 9-1\lambda_1 \\ y = & 5-2\lambda_1 \\ z = & -4+3\lambda_1 \end{cases} \qquad \mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = & -6+2\lambda_2 \\ y = & 11-5\lambda_2 \\ z = & 1+4\lambda_2 \end{cases}$$

Etape 2: On réécrit un (un seul)de ces deux systèmes sous forme d'une égalité multiple

par exemple $\mathcal{D}_2 : \frac{x+6}{2} = \frac{y-11}{-5} = \frac{z-1}{4}$ $(=\lambda_2)$

Etape 3: On remplace x, y, z de l'autre système dans ces deux égalités

par exemple de $\mathcal{D}_1$ (dans $\mathcal{D}_2$): $\frac{9-\lambda_1+6}{2} = \frac{5-2\lambda_1-11}{-5} = \frac{-4+3\lambda_1-1}{4}$

Etape 4: On résous ces égalités. (en déterminant la valeur du paramètre).

- Si une *mêmee* valeur du paramètre vérifie les deux égalités : les droites se coupent. il suffit alors de remplacer la paramètre pas la valeur trouvée dans l'équation d'où il provient, pour obtenir les coordonnées du point d'intersection
- Sinon : les droites ne se coupent pas.

4) L'angle (θ) entre $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ est égal à l'angle entre un *vecteur directeur* de $\mathcal{D}_1$ et un *vecteur directeur* de $\mathcal{D}_1$, par exemple entre $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$:

$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = -2+10+12 = 20$ et $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = [\![\vec{v}_1]\!][\![\vec{v}_1]\!]\cos(\theta)$

avec $[\![\vec{v}_1]\!] = \sqrt{14}$ et $[\![\vec{v}_2]\!] = \sqrt{45}$ donc $\cos(\theta) = \frac{20}{\sqrt{14}\sqrt{45}} = \frac{10}{3}\sqrt{\frac{2}{35}}$ et $\theta = 37.17^0$

5) Donner une équation *vectorielle* de la droite $\mathcal{D}_3$ passant par A et *parallèle* à $\mathcal{D}_2$.

$\mathcal{D}_3$ a comme équation vectorielle : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda_3\ \vec{v}_2 \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$

6) Donner une équation *vectorielle* de la droite $\mathcal{D}_4$ passant par D et E.

$\mathcal{D}_4$ a comme équation vectorielle : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OD} + \lambda_4\ \overrightarrow{DE} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 17 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} -4 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix}$

7) La *distance* de C à D. est $[\![\overrightarrow{CD}]\!] = \sqrt{2^2+13^2+4^2} = \sqrt{189}$

Bonus Le *rayon* d'une sphère centrée en C telle que le point D soit sur la surface de la sphère doit être égal à la distance CD, soit $\sqrt{189}$.