

Question 1

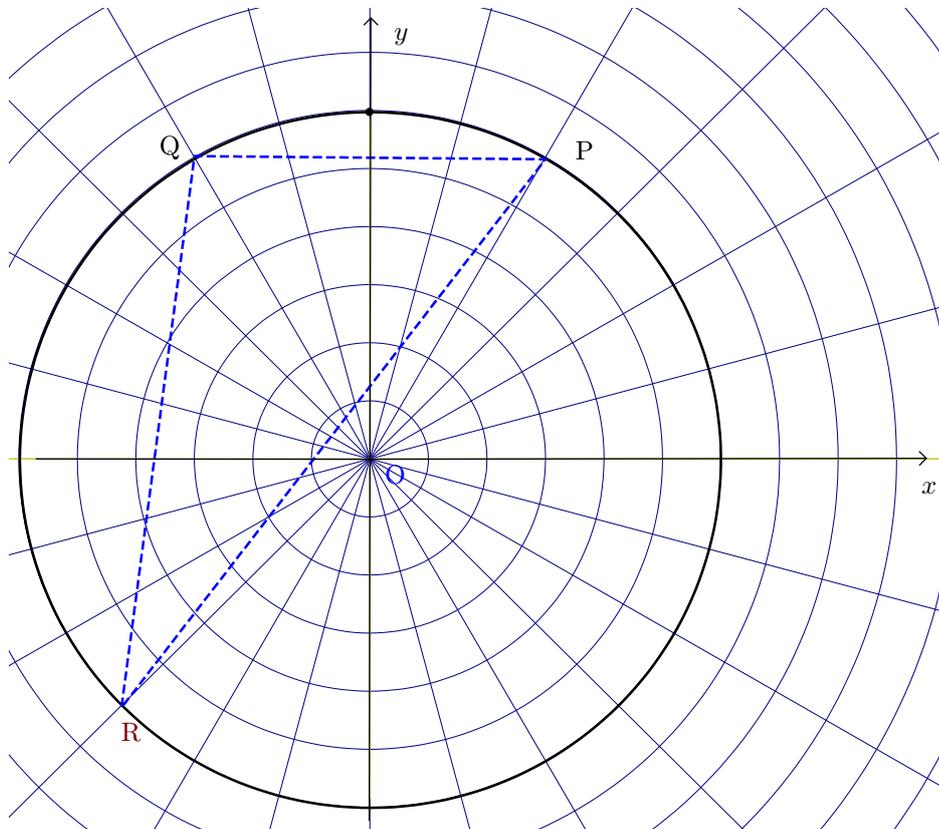
[22 points]

Sur la figure ci-dessous, le cercle en noir est le cercle *trigonométrique*.

Le point O est l'origine de repère orthonormé (O, \vec{x}, \vec{y})

Les points P, Q, R sont sur le cercle *trigonométrique*.

Les angles que forment les rayons OP, OQ et OR par rapport à l'axe des abscisse sont respectivement de 60° , 120° et 225° .



1) Quels sont les *valeurs exactes* de $\cos(120^\circ)$ et $\sin(120^\circ)$?

$$\cos(120^\circ) = -\cos(60^\circ) = -\frac{1}{2}$$

$$\sin(120^\circ) = \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2) Quels sont les *valeurs exactes* de $\cos(225^0)$ et $\sin(225^0)$?

$$\cos(225^0) = -\cos(45^0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(225^0) = -\sin(45^0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

3) Donner les *coordonnées* des 3 points

$$P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad Q\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad R\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

4) En déduire les *longueurs* des côtés QP et QR du triangle PQR

En ce qui concerne QR, la valeur numérique est voisine de 1.59

vous pouvez utiliser cette valeur pour la suite si vous ne trouvez pas l'expression exacte.

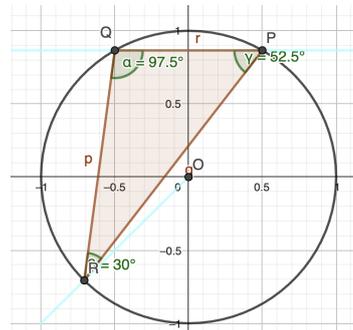
$$PQ = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{(1)^2 + (0)^2} = 1$$

$$\begin{aligned} QR &= \sqrt{(x_R - x_Q)^2 + (y_R - y_Q)^2} = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{-\sqrt{2}+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{2-2\sqrt{2}+1}{4}\right) + \left(\frac{2+2\sqrt{6}+3}{4}\right)} = \sqrt{\frac{8-2\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{4}} = \sqrt{\frac{4-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}} = 1.59 \end{aligned}$$

5) Pour continuer, nous admettons que la distance PR vaut 1.98

Dans ce cas, quelle est la valeur de l'angle \widehat{PQR} ?

$$\cos(\widehat{PQR}) = \frac{1.98^2 - 1.59^2 + 1^2}{-2 \times 1.59 \times 1} = -0.123 \quad \boxed{\widehat{PQR} \cong 97.1^0}$$



6) En déduire la valeur de l'angle \widehat{QRP}

$$\text{Par le théorème du sinus: } \frac{\sin(\widehat{QRP})}{QP} = \frac{\sin(\widehat{PQR})}{PR} \Rightarrow \sin(\widehat{QRP}) = \frac{QP}{PR} \sin(\widehat{PQR})$$

$$\Rightarrow \sin(\widehat{QRP}) = \frac{1}{1.98} \sin(97.1) \cong 0.5 \Rightarrow \boxed{\widehat{QRP} \cong 30^0}$$

7) Vrai ou faux :

Le périmètre du triangle PQR est supérieur au double de la longueur de l'arc RP.

Faux !

$$\text{Longueur arc} = (160 - 225) \frac{\pi}{180} = 2.356 \quad \Rightarrow \text{double} = 4.71 \quad \text{et périmètre} = 1 + 1.98 + 1.59 = 4.47$$

Bonus :

[+4]

Je suis l'angle θ , situé dans le second quadrant, et mon sinus vaut $\frac{6}{10}$.

Quelle est la valeur exacte de

$$\text{mon cosinus ?} \quad \sin(\theta) = \frac{3}{5} \quad \cos(\theta) = \frac{-4}{5}$$

$$\text{ma tangente ?} \quad \tan(\theta) = \frac{-3}{4}$$