Maths 11 N

Pre-Test 5

Lundi 26 Janvier 2026

Equations de Plan

Nom:____________

Question

On donne les vecteurs suivants: $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} -28 \\ 20 \\ 44 \end{pmatrix}$

1) L'*angle* entre $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ est:

$$\theta = \arccos\left(\frac{4\times 2 + (-1)\times 5 + 3\times(-1)}{\sqrt{4^2+(-1)^2+3^2}\times\sqrt{2^2+5^2+(-1)^2}}\right) = \arccos\left(\frac{8-5-3}{\sqrt{26}\times\sqrt{30}}\right) = \arccos(0) = 90^0$$

Remarque : Si le produit scalaire entre deux vecteurs est *nul*, les vecteurs sont orthogonaux.

Sinon il suffit de poursuivre la calcul de l'arcccosinus pour obtenir l'angle.

2) Une équation *vectorielle* du plan $\mathcal{P}$ passant par P: $(-3; 10, 5)$

et *parallèle* aux deux vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ est toujours donnée par la formule (vue en classe) :

$$\overrightarrow{\text{OM}} = \overrightarrow{\text{OP}} + \lambda_1\vec{v_1} + \lambda_2\vec{v_2} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_1\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -3 + 4\lambda_1 \; + 2\lambda_2 & (1) \\ y = 10 - \lambda_1 \; + 5\lambda_2 & (2) \\ z = 5 + 3\lambda_1 \; - \lambda_2 & (3) \end{cases}$$

3) On obtient l'équation *cartésienne* (de la forme $ax + by + cz + d = 0$)

en combinant les trois équations, ici de façon à éliminer λ_2.

$$(1) + 2\times(3) = \begin{cases} x = -3 \quad + 4\lambda_1 \; + 2\lambda_2 & (1) \\ 2z = 10 \quad + 6\lambda_1 \; - 2\lambda_2 & 2\times(3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x + 2z = 7 + 10\lambda_1$$

$$(2) + 5\times(3) = \begin{cases} y = \; 10 \quad - \lambda_1 \quad + 5\lambda_2 & (2) \\ 5z = \; 25 \quad + 15\lambda_1 \; - 5\lambda_2 & 5\times(3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow y + 5z = 35 + 14\lambda_1$$

$$\text{On a donc} \begin{cases} x + 2z = 7 + 10\lambda_1 & (I) \\ y + 5z = 35 + 14\lambda_1 & (II) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x + 14z = 49 + 70\lambda_1 & 7\times(I) \\ 5y + 25z = 175 + 70\lambda_1 & 5\times(II) \end{cases}$$

$$7(I) - 5(II): \quad 7x + 14z - 5y - 25z = -126$$

$\Rightarrow$ l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est donc : $\boxed{7x - 5y - 11z + 126 = 0}$

[On vérifie que P: $(-3; 10, 5)$ satisfait cette équation : $7(-3) - 5(10) - 11(5) + 126 = 0$]

4) Non, le vecteur $\vec{v}_1$ n'est pas *normal* au plan $\mathcal{P}$

car il est dans le plan (il est donc perpendiculaire au vecteur normal $\vec{n}$)

Oui, le vecteur $\vec{v}_3$ est *normal* au plan $\mathcal{P}$,

car $\boxed{\text{tout vecteur } \textit{normal} \text{ au plan est nécessairement } \textit{colinéaire} \text{ au vecteur } \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ -11 \end{pmatrix}}$

ce qui est pas le cas de $\vec{v}_3$, puisque $\vec{v}_3 = -4\vec{n}$.

5) On donne les points

$A: (4; 7; -3)$, $B: (3; 14; 7)$ et $C: (3; 25; -34)$

Voyons si ces trois points appartiennent à $\mathcal{P}$.

A : $7 \times 4 - 5 \times 7 - 11 \times (-3) + 126 \neq 0$ A$\notin \mathcal{P}$

B : $7 \times 3 - 5 \times 14 - 11 \times 7 + 126 = 0$ B$\in \mathcal{P}$

C : $7 \times 3 - 5 \times 25 - 11 \times (-34) + 126 \neq 0$ C$\notin \mathcal{P}$

6) Déterminer la *distance* de chacun des points A,B,C au plan $\mathcal{P}$.

Puisque B$\in \mathcal{P}$, la distance de B à $\mathcal{P}$ est *nulle* !

En ce qui concerne les points A et C, on utilise la formule

$$d = \frac{|ax_p + by_o + cz_p + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|7x_p - 5y_o - 11z_p + 126|}{\sqrt{49 + 25 + 121}}$$

ce qui donne:

$$\text{pour A} : d = \frac{|28 - 35 + 33 + 126|}{\sqrt{195}} = \frac{152}{\sqrt{195}}$$

$$\text{pour B} : d = \frac{|21 - 75 + 33 + 174|}{\sqrt{195}} = \frac{153}{\sqrt{195}}$$

Les points A et D sont donc presque équidistants par rapport au plan $\mathcal{P}$

Bonus:

Le plan $\mathcal{P}$' d'équation cartésienne $7x - 5y - 11z - 26 = 0$

est *parallèle* à $\mathcal{P}$, parce-qu'il à le même vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ -11 \end{pmatrix}$ que $\mathcal{P}$.

Il est facile de vérifier que seul le point A appartient à $\mathcal{P}$'.