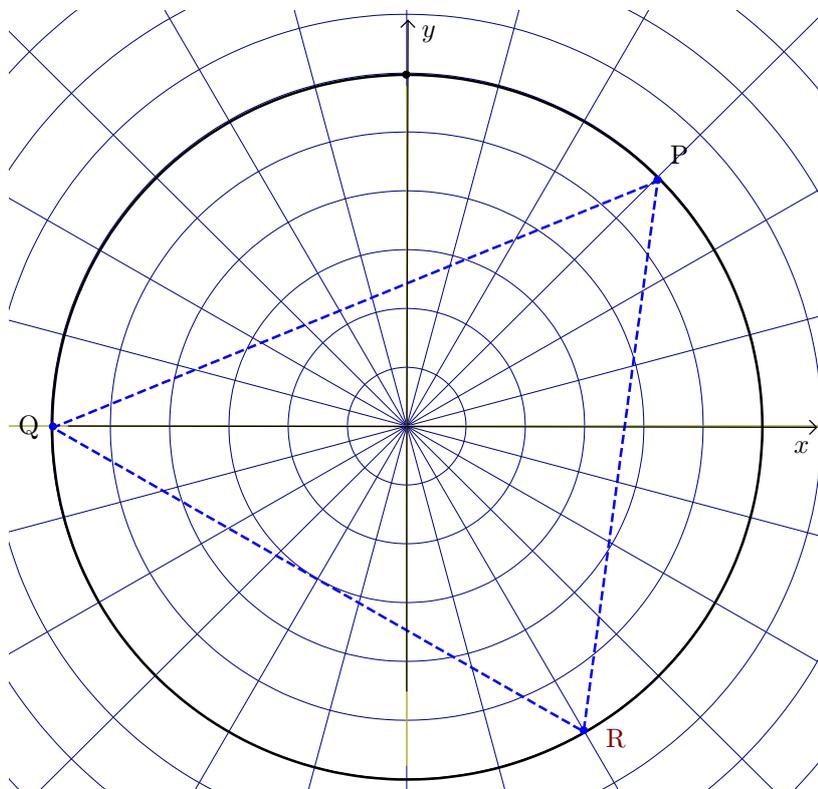


Question 1

[18 points]

Les point P, Q, R sont sur le *cercle trigonométrique*.

Les angles que forment les rayons OP, OQ et OR par rapport à l'axe des abscisse sont respectivement de 45° , 180° et 300° .



1) Quels sont les *valeurs exactes* de $\cos(300^\circ)$ et $\sin(300^\circ)$?

Comme l'angle 300° se trouve dans le IV quadrant, on va se référer à l'angle 60°

du premier quadrant :

$$\cos(300^\circ) = \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$\sin(300^\circ) = -\sin(60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2) Donner les *coordonnées* des 3 points

$$P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad Q(-1, 0), \quad R\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

3) En déduire les longueurs des 3 côtés p, r, q du triangle PQR

$$p = RQ = \sqrt{(x_R - x_Q)^2 + (y_R - y_Q)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - (-1)\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{9+3}{4}\right)} = \boxed{\sqrt{3} \simeq 1.73}$$

$$q = \sqrt{(x_P - x_R)^2 + (y_P - y_R)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

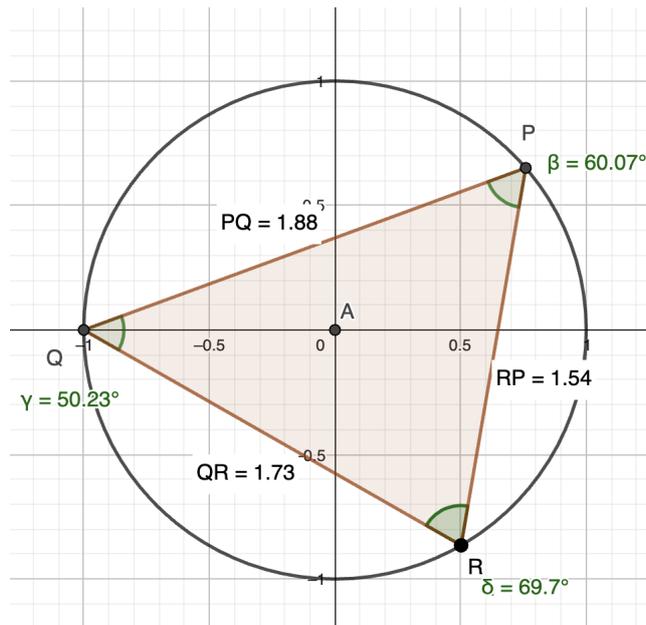
$$= \sqrt{\left(\frac{2-2\sqrt{2}+1}{4}\right) + \left(\frac{2+2\sqrt{6}+3}{4}\right)} = \sqrt{\frac{2-2\sqrt{2}+1+2+2\sqrt{6}+3}{4}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{6}-2\sqrt{2}+8}{4}}$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}+4}{2}} \simeq 1.5}$$

$$r = QR = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - (-1)\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}+2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2+4\sqrt{2}+4}{4}\right) + \left(\frac{2}{4}\right)} = \sqrt{\frac{2+4\sqrt{2}+4+2}{4}} = \sqrt{\frac{8+4\sqrt{2}}{4}} = \boxed{\sqrt{2+\sqrt{2}} \simeq 1.8}$$

Figure générée par GeoGebra



4) Que vaut l'angle \widehat{PQR} ? $\cos(\widehat{PQR}) = \frac{1.54^2 - 1.88^2 + 1.73^2}{-2 \times 1.88 \times 1.73} = 0.63$ $\boxed{\widehat{PQR} = 50.23^\circ}$

Que valent les deux autres angles ?

Par le théorème du sinus: $\frac{\sin(\widehat{RPQ})}{RQ} = \frac{\sin(\widehat{PQR})}{PR} \Rightarrow \sin(\widehat{RPQ}) = \frac{p}{q} \sin(\widehat{PQR})$

$$\Rightarrow \sin(\widehat{RPQ}) = \frac{1.73}{1.54} \sin(50.23) = 0.86 \Rightarrow \boxed{\widehat{RPQ} \simeq 60^\circ}$$

Donc l'angle en R vaut $180 - 50.23 - 60 \simeq \boxed{70^\circ}$

5) La longueur de l'arc QR est $(300 - 180) \frac{\pi}{180} = \boxed{\frac{11\pi}{9}} \simeq 3.84$