



PAM-MATHS

Examen de Pâques
 Classe 12
 3 problèmes

Mardi 31 Mars 2026
 Durée indicative: 120min

Réponses

Total: / 50 points

Problème 1 (été 2020)

[/17 points]

On cherche à résoudre $y' = f'(x, y) := -2xy^2$, avec $s(0) = 1$

a)

n	x	y
0	0	1
1	$\frac{1}{3}$	1
2	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{9} \cong 0.7778$
3	1	$\frac{371}{729} \cong 0.5089$

b) $s(h) = s(0) + h f'(0, 1) = 1$

$$s(2h) = s(h) + h f'(h, 1) = 1 + h(-2h) = 1 - 2h^2$$

$$s'(2h) = -2(2h) \cdot s(2h) = -4h(1 - 2h^2)^2$$

c) $\int \frac{dy}{y^2} = -2 \int x dx \Rightarrow \frac{-1}{y} = -x^2 + c \Rightarrow y = \frac{1}{x^2 + c}$

$y = 1$ et $x = 0$ donc $c = 1$ $s(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

d) $\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)' = -\frac{4x}{(x^2 + 1)^2} = -2x s^2$

e) $s(2h) = s(1) \Leftrightarrow 1 - 2h^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow h^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$ $h = \frac{1}{2}$

Remarque : On pourrait être tenté d'écrire $s(2h) = s(1) \Rightarrow 2h = 2 \Rightarrow h = \frac{1}{2}$

(ce qui donne la même réponse), cependant cela repose sur un abus de notation, car ici « $s(2h)$ » devrait plutôt s'écrire s_{2h} .

f) En procédant par analogie avec (d) :

$$y' = \left(\frac{2}{x^2 + 2}\right)' = -\frac{4x}{(x^2 + 2)^2} = -x \left(\frac{2}{x^2 + 2}\right)^2 = -x \left(\frac{2}{x^2 + 2}\right)^2 \quad \text{donc } \boxed{y' = -xy^2}$$

$$p(x) = 4x^3 - 8x^2 - 53x + 84$$

a) $p'(x) = 12x^2 - 16x - 53$

$$x_0 = -1 \quad x_1 = x_0 - \frac{p'(x_0)}{p(x_0)}$$

$$p(x_0) = 125 \quad \text{et} \quad p'(x_0) = -25$$

$$\text{donc } x_1 = -1 - \frac{-25}{125} = 4 \quad \text{et} \quad p(4) = 256 - 128 - 212 + 84 = 0$$

b)

4	4	-33	-45
↓	12	48	45
4	16	15	0

Quotient: $Q = 4x^2 + 16x + 15$
 Reste: $R = 0$

c) $p(x) = (x - 3)(4x^2 + 16x + 15) = \boxed{(x - 3)(2x + 5)(2x + 3)}$ ($\Delta = 16$)

d) $x_1 = x_0 - \frac{q(x_0)}{q'(x_0)}$ donne ici $3 = x_0 - \frac{4x_0^3 + 4x_0^2 - 33x_0 - 45}{12x_0^2 + 8x_0 - 33}$

$$\Rightarrow (x_0 - 3)(12x_0^2 + 8x_0 - 33) = 4x_0^3 + 4x_0^2 - 33x_0 - 45$$

$$\Rightarrow 12x_0^3 + 8x_0^2 - 33x_0 - 36x_0^2 - 24x_0 + 99 = 4x_0^3 + 4x_0^2 - 33x_0 - 45$$

$$\Rightarrow 8x_0^3 - 32x_0^2 - 24x_0 + 144 = 0$$

$$\Rightarrow x_0^3 - 4x_0^2 - 3x_0 + 18 = 0$$

Comme 3 est un zéro de $q(x)$, alors 3 est aussi un zéro de ce polynôme

puisque $3 = 3 - \frac{q(3)}{q'(3)} = 3 - 0$ (Vérification : $27 - 36 - 9 + 18 = 0$)

Donc $x_0^3 - 4x_0^2 - 3x_0 + 18$ est divisible par $x - 3$

1	-4	-3	18
↓	3	-3	-18
1	-1	-6	0

Quotient: $Q = x^2 - x - 6$
 Reste: $R = 0$

$$x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3) \quad \text{la valeur de } x_0 \text{ à choisir est donc } \boxed{x_0 = -2}$$

Vérification :

$$x_1 = x_0 - \frac{q(x_0)}{q'(x_0)} = x_0 - \frac{4x_0^3 + 4x_0^2 - 33x_0 - 45}{12x_0^2 + 8x_0 - 33} = (-2) - \frac{-32 + 16 + 66 - 45}{48 - 16 - 33} = -2 - \frac{5}{-1} = 3$$

Partie A

a) • on cherche capital après 84 mois (7 ans)

- $p = 100$ CHF
- $n = 84$
- $r_m = \sqrt[12]{1+i_a} = 1,000995$
- $C = ?$

donc $n = 95$

$$C = p \cdot \ddot{s}_{\overline{n}|r_m}$$

$$C = p \cdot r_m \cdot \frac{r_m^n - 1}{r_m - 1}$$

$$C = 8765 \text{ CHF}$$

en fait 7 ans et 11 mois $\Rightarrow n = 95$ et $C = 10'068 \text{ CHF}$

b) • on cherche nombre de mois

- $p = 100$ CHF
- $C = 20'000$
- $r_m = 1,000995$
- $n = ?$

$$C = p \cdot \ddot{s}_{\overline{n}|r_m}$$

$$C = p \cdot r_m \cdot \frac{r_m^n - 1}{r_m - 1}$$

$$r_m^n = \frac{C(r_m - 1)}{p \cdot r_m} + 1$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{C(r_m - 1)}{p \cdot r_m} + 1\right)}{\ln(r_m)}$$

$$n = 182 \text{ mois}$$

\rightarrow À partir de février 2031

Partie B

• on cherche le facteur de capitalisation

- $p = 1000$ CHF
- $n = 10$ ans
- $C = 12'000$ CHF
- $r = ?$

$$C = p \cdot \ddot{s}_{\overline{n}|r}$$

$$C = p \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

$$Cr - C = p r^n - p r$$

$$p r^n + (-p - C)r + C = 0$$

$$1000 r^n - 13'000 r + 12'000 = 0 \quad \leftarrow \text{équation polynomiale}$$

• méthode Newton:

$$f(r) = 1000 r^n - 13000 r + 12000$$

$$f'(r) = 11'000 r^{10} - 13000$$

$$r_0 = 1,03$$

$$r_1 = r_0 - \frac{f(r_0)}{f'(r_0)} = 1,03 - \frac{1000 \cdot 1,03^{10} - 13000 \cdot 1,03 + 12000}{11'000 \cdot 1,03^{10} - 13000}$$

$$r_1 = 1,0332$$

(Merci à Lara)

$$\rightarrow \boxed{i = 3,32\%}$$

0	1er jan	2016	100
1	1er fev	2016	200.099
2	1er mars	2016	300.298
3	1er avr	2016	400.597
4	1er mai	2016	500.996
5	1er juin	2016	601.494
6	1er juil	2016	702.092
7	1er aout	2016	802.79
8	1er sept	2016	903.589
9	1er oct	2016	1004.49
10	1er nov	2016	1105.49
11	1er dec	2016	1206.59
12	1er jan	2017	1307.79
13	1er fev	2017	1409.09
14	1er mars	2017	1510.49
15	1er avr	2017	1611.99
16	1er mai	2017	1713.59
17	1er juin	2017	1815.3
18	1er juil	2017	1917.1
19	1er aout	2017	2019.01
20	1er sept	2017	2121.02
21	1er oct	2017	2223.13
22	1er nov	2017	2325.34
23	1er dec	2017	2427.65
24	1er jan	2018	2530.06
25	1er fev	2018	2632.58
26	1er mars	2018	2735.2
27	1er avr	2018	2837.92
28	1er mai	2018	2940.74
29	1er juin	2018	3043.67
30	1er juil	2018	3146.69
31	1er aout	2018	3249.82
32	1er sept	2018	3353.06
33	1er oct	2018	3456.39
34	1er nov	2018	3559.83
35	1er dec	2018	3663.37
36	1er jan	2019	3767.01
37	1er fev	2019	3870.76
38	1er mars	2019	3974.61
39	1er avr	2019	4078.56
40	1er mai	2019	4182.62
41	1er juin	2019	4286.78
42	1er juil	2019	4391.04
43	1er aout	2019	4495.41
44	1er sept	2019	4599.88
45	1er oct	2019	4704.45
46	1er nov	2019	4809.13
47	1er dec	2019	4913.91
48	1er jan	2020	5018.8
49	1er fev	2020	5123.79
50	1er mars	2020	5228.89
51	1er avr	2020	5334.09
52	1er mai	2020	5439.39
53	1er juin	2020	5544.8
54	1er juil	2020	5650.32
55	1er aout	2020	5755.94
56	1er sept	2020	5861.66
57	1er oct	2020	5967.49
58	1er nov	2020	6073.43
59	1er dec	2020	6179.47
60	1er jan	2021	6285.61
61	1er fev	2021	6391.86
62	1er mars	2021	6498.22
63	1er avr	2021	6604.68
64	1er mai	2021	6711.25
65	1er juin	2021	6817.93
66	1er juil	2021	6924.71
67	1er aout	2021	7031.59
68	1er sept	2021	7138.59
69	1er oct	2021	7245.69
70	1er nov	2021	7352.89
71	1er dec	2021	7460.21
72	1er jan	2022	7567.63
73	1er fev	2022	7675.15
74	1er mars	2022	7782.79
75	1er avr	2022	7890.53
76	1er mai	2022	7998.37
77	1er juin	2022	8106.33
78	1er juil	2022	8214.39
79	1er aout	2022	8322.56
80	1er sept	2022	8430.84
81	1er oct	2022	8539.22
82	1er nov	2022	8647.71
83	1er dec	2022	8756.31
84	1er jan	2023	8865.02
85	1er fev	2023	8973.84
86	1er mars	2023	9082.76
87	1er avr	2023	9191.8
88	1er mai	2023	9300.94
89	1er juin	2023	9410.19
90	1er juil	2023	9519.55
91	1er aout	2023	9629.02
92	1er sept	2023	9738.59
93	1er oct	2023	9848.28
94	1er nov	2023	9958.07
95	1er dec	2023	10'068.
96	1er jan	2024	10'178.

120	1er jan	2026	12851.4
121	1er fev	2026	12964.2
122	1er mars	2026	13077.1
123	1er avr	2026	13190.1
124	1er mai	2026	13303.2
125	1er juin	2026	13416.4
126	1er juil	2026	13529.7
127	1er aout	2026	13643.2
128	1er sept	2026	13756.8
129	1er oct	2026	13870.5
130	1er nov	2026	13984.3
131	1er dec	2026	14098.2
132	1er jan	2027	14212.2
133	1er fev	2027	14326.3
134	1er mars	2027	14440.6
135	1er avr	2027	14554.9
136	1er mai	2027	14669.4
137	1er juin	2027	14784.
138	1er juil	2027	14898.7
139	1er aout	2027	15013.5
140	1er sept	2027	15128.4
141	1er oct	2027	15243.5
142	1er nov	2027	15358.6
143	1er dec	2027	15473.9
144	1er jan	2028	15589.3
145	1er fev	2028	15704.8
146	1er mars	2028	15820.4
147	1er avr	2028	15936.2
148	1er mai	2028	16052.
149	1er juin	2028	16168.
150	1er juil	2028	16284.1
151	1er aout	2028	16400.3
152	1er sept	2028	16516.6
153	1er oct	2028	16633.
154	1er nov	2028	16749.5
155	1er dec	2028	16866.2
156	1er jan	2029	16983.
157	1er fev	2029	17099.9
158	1er mars	2029	17216.9
159	1er avr	2029	17334.
160	1er mai	2029	17451.2
161	1er juin	2029	17568.6
162	1er juil	2029	17686.1
163	1er aout	2029	17803.6
164	1er sept	2029	17921.4
165	1er oct	2029	18039.2
166	1er nov	2029	18157.1
167	1er dec	2029	18275.2
168	1er jan	2030	18393.4
169	1er fev	2030	18511.6
170	1er mars	2030	18630.1
171	1er avr	2030	18748.6
172	1er mai	2030	18867.2
173	1er juin	2030	18986.
174	1er juil	2030	19104.9
175	1er aout	2030	19223.9
176	1er sept	2030	19343.
177	1er oct	2030	19462.2
178	1er nov	2030	19581.6
179	1er dec	2030	19701.1
180	1er jan	2031	19820.7
181	1er fev	2031	19940.4
182	1er mars	2031	20'060.2
183	1er avr	2031	20180.2
184	1er mai	2031	20300.2
185	1er juin	2031	20420.4
186	1er juil	2031	20540.7
187	1er aout	2031	20661.1
188	1er sept	2031	20781.7
189	1er oct	2031	20902.4
190	1er nov	2031	21023.2
191	1er dec	2031	21144.1
192	1er jan	2032	21265.1
193	1er fev	2032	21386.2
194	1er mars	2032	21507.5
195	1er avr	2032	21628.9
196	1er mai	2032	21750.4
197	1er juin	2032	21872.
198	1er juil	2032	21993.8
199	1er aout	2032	22115.7
200	1er sept	2032	22237.7
201	1er oct	2032	22359.8
202	1er nov	2032	22482.
203	1er dec	2032	22604.4
204	1er jan	2033	22726.9