



PAM—MATHS

Examen de Pâques

Classe 12

3 problèmes

Mardi 31 Mars 2026

Durée indicative: 120min

Nom: _____

Total: / 50 points

Problème 1 (été 2020)

[/17 points]

On considère l'équation différentielle $y' = -2x \cdot y^2$ et on note $s(x)$ la solution particulière satisfaisant la condition initiale $s(0) = 1$.

a) Estimer la valeur de $s(1)$ en utilisant la méthode d'Euler avec des pas de longueur $h = \frac{1}{3}$.

b) Déterminer les estimations de $s(2h)$ et $s'(2h)$ en utilisant la méthode d'Euler avec des pas de longueur inconnue h .

c) En remplaçant y' par $\frac{dy}{dx}$, l'équation peut s'écrire $\frac{dy}{y^2} = -2x \cdot dx$.

1. Calculer $\int \frac{dy}{y^2}$ en choisissant la solution pour laquelle la constante dans la primitive vaut 0.

2. Calculer $\int -2x \cdot dx$.

3. En déduire la solution générale de l'équation différentielle.

d) Vérifier (sans avoir forcément résolu l'équation) que $s(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.

e) Il existe une valeur de h , $h > 0$, telle que l'estimation de $s(2h)$ trouvée à la question b) fournit une réponse exacte. Trouver cette valeur de h .

Si l'estimation de $s(2h)$ n'a pas été trouvée, prendre $s(2h) \cong 1 - \frac{1}{2}h^2$ pour traiter cette question.

f) Trouver une équation différentielle faisant intervenir x , g et g' et qui admet la fonction

$g(x) = \frac{2}{x^2 + 2}$ comme solution particulière.

Problème 2 (été 2021)

[/17 points]

On donne le polynôme $p(x) = 4x^3 - 8x^2 - 53x + 84$.

- a) On aimerait trouver un zéro de ce polynôme avec la formule de Newton (méthode de la tangente). Prouver qu'en choisissant la valeur initiale $x_0 = -1$, on obtient un zéro du polynôme p en appliquant une seule fois la formule de Newton.

On considère un autre polynôme $q(x) = 4x^3 + 4x^2 - 33x - 45$.

- b) En employant le schéma de Horner, vérifier que $x_1 = 3$ est un zéro du polynôme q .
- c) Écrire le polynôme q sous forme d'un produit de polynômes du premier degré à **coefficients entiers**.
- d) On aimerait trouver le zéro $x_1 = 3$ de ce polynôme avec la méthode de la tangente. Déterminer la valeur initiale x_0 qu'il faut choisir ($x_0 \neq 3$), pour qu'on obtienne ce zéro en appliquant une seule fois la formule de Newton.

Problème 3 (été 2016)

[/16 points]

Ce problème de mathématiques financières est constitué de deux parties indépendantes les unes des autres.

Partie A

Une personne place 100 francs à la banque chaque premier du mois, à partir du 1^{er} janvier 2016. Le taux d'intérêt **annuel** ne varie pas et il s'élève à 1,2%. On suppose de plus que la banque ne facture aucun frais.

- a) De quelle somme disposera cette personne le 31 décembre 2023 ?
- b) À partir de quelle date, au mois près, pourra-elle disposer de 20'000 francs au minimum ?

Partie B

Une personne place 1000 francs à la banque au début de chaque année. À la fin de la 10^{ème} année, elle dispose de 12'000 francs. Quel est le taux d'intérêt annuel, proche de 3%, appliqué à ce placement ?

Indication : Trouver une équation polynomiale dont la solution est $(1 + \text{le taux cherché})$, puis utiliser la méthode de Newton une seule fois pour estimer ce taux.