Lara Roda 17.12.25

Examen Noël - PAM - Maths

Problème 1

a) $y' = -\frac{y}{2x} + 5x + 3$ $\quad s(1) = -2$ $\quad h = \frac{x_f - x_i}{n} = \frac{1}{2}$

n	0	1	2
x	1	1,5	2
y	-2	$\frac{5}{2}$	$\frac{22}{3}$

$x_{n+1} = x_n + h$

$y_{n+1} = y_n + h \cdot F(x_n ; y_n)$

- $y_1 = -2 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{-2}{2 \cdot 1} + 5 \cdot 1 + 3\right) = \frac{5}{2}$
- $y_2 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{\frac{5}{2}}{2 \cdot 1,5} + 5 \cdot 1,5 + 3\right) = \frac{22}{3}$

$$\boxed{s(2) \approx \frac{22}{3}}$$ ✓

b) $y' = -\frac{y}{2x} + 5x + 3$

- équation homogène : $y' + \frac{y}{2x} = 0$

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int -\frac{1}{2x}\, dx + c$$

$$\ln(y) = -\frac{1}{2} \ln(x) + c$$

$$y_H = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot c_1$$

- $y_{NH} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot c(x)$ ← Ansatz : on remplace y_{NH} dans l'ED

$$\Rightarrow c'(x)\frac{1}{\sqrt{x}} + \cancel{c(x) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}} = \cancel{-\frac{\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot c(x)}{2x}} + 5x + 3$$

$$c'(x) = 5x^{\frac{3}{2}} + 3\sqrt{x}$$

$$\rightarrow c(x) = 5 \cdot \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + 3 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$$

$$c(x) = 2x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}}$$

$$\rightarrow y_{NH} = 2x^2 + 2x$$

- solution générale : $y = y_{NH} + y_H$

$$\boxed{y = 2x(x+1) + \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot c_1}$$

c) • solution particulière : $s(1) = -2$

$$-2 = 2\cdot 1(1+1) + \frac{1}{\sqrt{1}}\cdot C$$

$$C = -2-4 = -6$$

$$\Rightarrow \boxed{s(x) = 2x(x+1) - \frac{6}{\sqrt{x}}}$$

d) • $s(1) = -2$

• $s\left(\frac{3}{2}\right) = 2\cdot\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right) - \frac{6}{\sqrt{\frac{3}{2}}} \simeq 2,6$

$\rightarrow$ $s(1) < 0$ et $s\left(\frac{3}{2}\right) > 0$: $s(1)\cdot s\left(\frac{3}{2}\right) < 0$

$s(x)$ est une fonction continue donc elle admet un zéro entre $\left[1 ; \frac{3}{2}\right]$ bien !

e) $s(x) = 2x(x+1) - \frac{6}{\sqrt{x}}$ $x_1 = 1$ $x_2 = \frac{3}{2}$

• itération 1 :

$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} = 1,25$ $s(x_3) = 0,258 > 0$

$\rightarrow x_0 \in [1 ; 1,25]$

• itération 2 :

$x_4 = \frac{x_1 + x_3}{2} = 1,125$ $s(x_4) = -0,876 < 0$

$$\rightarrow \boxed{x_0 \in [1,125 ; 1,25]}$$

f) $\begin{cases} x_0 = 1 \\ s(x) = 2x(x+1) - \frac{6}{\sqrt{x}} \\ s'(x) = 4x + 2 + \frac{6}{2x^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$

• itération 1 : $x_1 = x_0 - \frac{s(x_0)}{s'(x_0)}$

$$x_1 = 1 - \frac{-2}{9} = \frac{11}{9} \simeq 1,222$$

$$\rightarrow \boxed{x_1 \simeq \frac{11}{9}}$$

Problème 2

Première partie

a) $y' = -\tan(x)\, y + 2x \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$ $\quad s(0) = 2$ $\quad R = \dfrac{x_f - x_i}{2} = \dfrac{1}{2}$

(j'ai admis que x est en radians)

n	0	1	2
x	0	0,5	1
y	2	2	1,664

$x_{n+1} = x_n + R$

$y_{n+1} = y_n + R \cdot F(x_n ; y_n)$

- $y_1 = 2 + \frac{1}{2} \cdot (-\tan(0) \cdot 2 + 0) = 2$
- $y_2 = 2 + \frac{1}{2} \cdot (-\tan(0,5) \cdot 2 + 2 \cdot 0,5 \cdot \sin(0,5) \cdot \cos(0,5)) = 1,664$

$$\boxed{s(1) \simeq 1,664}$$

Oui

b) $y' + \tan(x)\, y = 2x \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$

- équation homogène: $y' + \tan(x)\, y = 0$

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int -\tan(x)\, dx + c$$

$$\ln(y) = \ln(\cos(x)) + c$$

$$y_H = \cos(x) \cdot C$$

- Ansatz: $y_{NH} = \cos(x) \cdot c(x)$

$$\rightarrow \quad c'(x)\cos(x) - \cancel{c(x)\sin(x)} + \cancel{\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot \cos(x)\, c(x)} = 2x \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$$

$$c'(x) = 2x \cdot \sin(x)$$

intégration par parties:

$$\begin{cases} f(x) = 2x \\ g(x) = -\cos(x) \end{cases} \quad \begin{cases} f'(x) = 2 \\ g'(x) = \sin(x) \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad c(x) = \int 2x \cdot \sin(x)$$

$$c(x) = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)$$

$$c(x) = -2x\cos(x) + \int 2\cos(x)\, dx$$

$$c(x) = -2x\cos(x) + 2\sin(x)$$

$$\Rightarrow \quad y_{NH} = -2x\cos^2(x) + 2\cos(x)\sin(x)$$

- solution générale: $y = y_{NH} + y_H$

$$\boxed{y = -2x\cos^2(x) + 2\cos(x)\sin(x) + \cos(x) \cdot C}$$

Oui !

c) • solution particulière : $s(1) = -2$

$$-2 = 2\cdot 1(1+1) + \frac{1}{\sqrt{1}}\cdot C$$

$$C = -2-4 = -6$$

$$\Rightarrow \boxed{s(x) = 2x(x+1) - \frac{6}{\sqrt{x}}}$$ ✓

d) • $s(1) = -2$

• $s\left(\frac{3}{2}\right) = 2\cdot\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right) - \frac{6}{\sqrt{\frac{3}{2}}} \simeq 2,6$

$\rightarrow$ $s(1) < 0$ et $s\left(\frac{3}{2}\right) > 0$: $s(1)\cdot s\left(\frac{3}{2}\right) < 0$

$s(x)$ est une fonction continue donc elle admet un zéro entre $\left[1 ; \frac{3}{2}\right]$ bien ! ✓

e) $s(x) = 2x(x+1) - \frac{6}{\sqrt{x}}$ $\qquad x_1 = 1 \qquad x_2 = \frac{3}{2}$

• itération 1 :

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} = 1,25 \qquad s(x_3) = 0,258 > 0$$

$$\rightarrow x_0 \in [1 ; 1,25]$$

• itération 2 :

$$x_4 = \frac{x_1 + x_3}{2} = 1,125 \qquad s(x_4) = -0,876 < 0$$

$$\rightarrow \boxed{x_0 \in [1,125 ; 1,25]}$$ ✓

f) $$\begin{cases} x_0 = 1 \\ s(x) = 2x(x+1) - \frac{6}{\sqrt{x}} \\ s'(x) = 4x + 2 + \frac{6}{2x^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

• itération 1 : $x_1 = x_0 - \frac{s(x_0)}{s'(x_0)}$

$$x_1 = 1 - \frac{-2}{9} = \frac{11}{9} \simeq 1,222$$

$$\rightarrow \boxed{x_1 \simeq \frac{11}{9}}$$ ✓