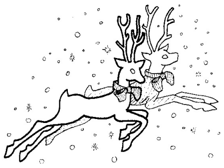


PAM − MATHS

Examen de Décembre

Classe 12

2 problèmes

Mercredi 17 décembre 2025

RÉPONSES

Total: / 40 points

Problème 1 (été 2023)

On considère l'équation différentielle $y' = -\frac{y}{2x} + 5x + 3$ et on note s sa solution particulière satisfaisant la condition initiale $s(1) = -2$.

a) On veut estimer s(2) par la méthode d'Euler en 2 pas. On prend donc $h = \frac{1}{2}$

n	x	y
0	1	-2
1	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2} = 2.5$
2	2	$\frac{22}{3} \cong 7.33$

b) Afin de déterminer la solution générale de l'équation différentielle, on commence par résoudre l'équation homogène associée : $y' = -\frac{y}{2x}$, qui est à variables séparables:

$$\int \frac{dy}{y} = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \quad \ln|y| = -\tfrac{1}{2}\ln|x| + c \Rightarrow \quad y_{H} = \pm \frac{C}{\sqrt{|x|}}$$

Puis l'on cherche la solution générale

– Soit par la méthode de variation de la constante:

$$y_{\text{NH}} = \pm C(x)|x|^{-\frac{1}{2}}$$

$$y'_{\text{NH}} = \pm\left(C'(x)|x|^{-\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}C(x)|x|^{-\frac{3}{2}}\,\text{sgn}(x) \right)$$

Pour avoir solution de l'équation différentielle, il faut alors que:

$$\pm\left(C'|x|^{-\frac{1}{2}} - \frac{C}{2}|x|^{-\frac{3}{2}}\,\text{sgn}(x) \right) = \mp\frac{C\,|x|^{-\frac{1}{2}}}{2x} + 5x + 3$$

$$\Rightarrow \pm\, C'|x|^{-\frac{1}{2}} = 5x + 3 \quad \Rightarrow C'(x) = \pm\ (5x+3)\sqrt{|x|}$$

$$\Rightarrow C(x) = \pm \int (5x+3)\sqrt{|x|}\,dx = \pm\ 2\,|x|^{\frac{3}{2}}\,(x+1)\text{sng}(x)$$

On remplace dans l'ansatz :

$$y_{\text{NH}} = \pm C(x)|x|^{-\frac{1}{2}} = \pm\Big(\pm\ 2\,|x|^{3/2}\,(x+1)\text{sng}(x)|x|^{-\frac{1}{2}}\Big)|x|^{-\frac{1}{2}} = 2\,|x|^{\frac{3}{2}}\,(x+1)\text{sng}(x)|x|^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 2\,|x|^{\cdot}\,(x+1)\text{sng}(x) = \boxed{2x^{\cdot}\,(x+1)}$$

– Soit sur l'hypothèse que la solution non homogène doit être un fonction polynomiale du second degré:

$$y_{\text{NH}} = ax^2 + bx + c$$

$$y'_{\text{NH}} = 2ax + b$$

Pour être solution de l'équation différentielle, on doit donc avoir :

$$2ax+b=-\frac{ax^2+bx+c}{2x}+5x+3 \quad\Leftrightarrow 4ax^2+2bx=-ax^2-bx-c+10x^2+6x$$
$$\Leftrightarrow 5ax^2+2bx+c=10x^2+6x \quad\Leftrightarrow \begin{cases} 5a=10 \\ 2b=6 \\ c=0 \end{cases}$$

donc on trouve ici aussi $\boxed{y_{\text{NH}}=2x^2+2x=2x\cdot(x+1)}$

On obtient donc la solution générale : $y_g=y_H+y_{\text{NH}}$

$$=\pm\frac{C}{\sqrt{|x|}}+2x\cdot(x+1)$$

c) La solution particulière est telle de $s(1)=-2$:

$$\text{donc } \pm C+4=-2 \qquad \Rightarrow \pm C=-6 \qquad \Rightarrow C=\mp 6$$

ce qui donne finalement : $\boxed{s(x)=2x\cdot(x+1)-\frac{6}{\sqrt{|x|}}}$

d) Les calculs faits pour répondre à la question (a) suggèrent que la courbe s(x) est croissante depuis la position initiale (1;-2). Selon le tableau de la méthode d'Euler, il y a un changement de signe de y lorsque x passe de $x_0=1$ à $x_1=\frac{3}{2}$. Un argument de preuve repose sur la continuité de la fonction solution: $s(x_0)s(x_1)<0 \Rightarrow \exists\ \xi\in]x_0,x_1[\ \text{tq.}\, s(\xi)=0$

e) Par la méthode de la bissection

n	bx_n	by_n
0	$a=x_0=1$	-2
0	$b=x_1=\frac{3}{2}$	2.5
1	1.25	0.258437
2	1.125	-0.875604
3	1.1875	-0.310665

longueur de l'intervalle
init : $b-a=\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{8}$

Un intervalle de longueur $\frac{1}{8}$ qui contient la solution est $[1.125; 1,25]$

(Selon le tableau ci-dessus, la dichotomie propose $x=1.1875.$ comme solution dans cet intervalle)

f) Avec la méthode de Newton, on obtient :

n	Nx_n
0	1
0	1.222222
1	1.222168
2	1.222168
3	1.222168

On remarque que dès la seconde étape, on a 6 décimales stables.

La première étable donne $x\cong 1.222$.

Comparaison avec la solution proposée par un CAS:

$x=1.2216848758033524524784536439225574 75\ldots$

Problème 2 (hiver 2023) **[/20 point]**

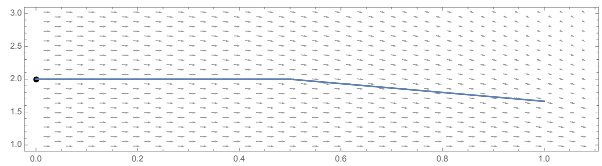
Première Partie

On considère l'équation différentielle $y' + \tan(x)\, y = 2x \sin(x) \cos(x)$ avec $x \in [0, 1]$

On note s sa solution particulière satisfaisant la condition initiale $s(0) = 2$.

(a) On veut estimer $s(1)$ avec la méthode d'Euler à deux pas, donc $h = \frac{1}{2}$

n	x	y
0	0	2
1	$\frac{1}{2}$	2
2	1	$2 + \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{1}{2}\right)\cos\left(\frac{1}{2}\right) - 2\tan\left(\frac{1}{2}\right)\right) \cong 1.6641$



(b) La solution générale s'obtient en commençant par résoudre l'équation homogène associée :

$$y' = -\tan(x)\, y \quad \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = \int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} dx$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \ln|\cos(x)| + c \Rightarrow y_H = \pm C\,|\cos(x)|$$

Pour simplifier le calcul, on considère seulement $y_H = C \cos(x)$

Ansatz : $y_{\text{NH}} = C(x)\cos(x)$

$$\Rightarrow \quad y'_{\text{NH}} = C'(x) \cos(x) - \mathrm{C}\sin(x)$$

Pour avoir solution de l'équation différentielle, il faut alors que:

$$C'(x) \cos(x) - \mathrm{C}\sin(x) + \tan(x) C \cos(x) = 2x \sin(x)\cos(x)$$

$$\Rightarrow C'(x) \cos(x) = 2x\sin(x)\cos(x) \qquad \Rightarrow C'(x) = 2x\sin(x)$$

On trouve $C(x)$ en intégrant *par parties* : $C(x) = 2\int x \sin(x)\, dx = 2\sin(x) - 2x\cos(x)$

Donc $y_{\text{NH}} = (\sin(x) - x\cos(x))2\cos(x)$

et $y_g = C \cos(x) + (\sin(x) - x\cos(x))2\cos(x) = \boxed{\cos(x)\,(2\sin(x) - 2x\cos(x) + C)}$

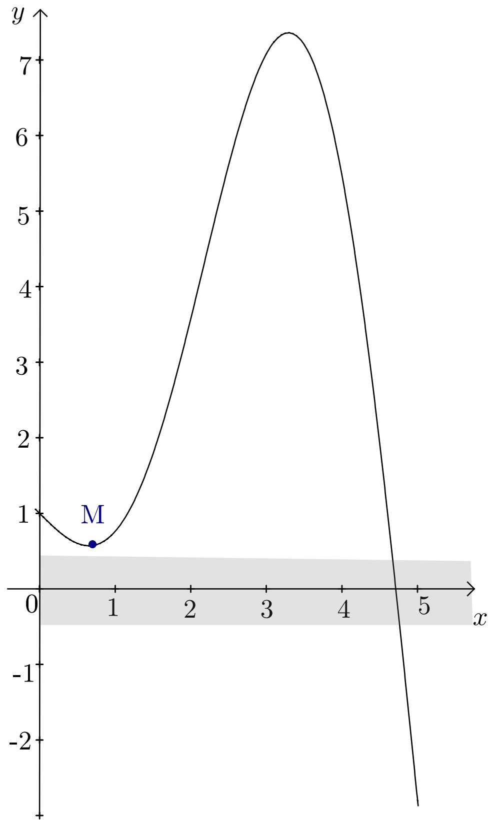
Si l'on veut la solution particulière s, on a: $\cos(0)\,(2\sin(0) - 0\cos(0) + C) = 2 \Rightarrow C = 2$

ce qui donne s(1) $= \cos(1)\,(2\sin(1) - 2\cos(1) + 2) = \boxed{1.40605}$

Deuxième partie

On considère la fonction $f(x) = 1 + \sin(x) - 2x\cos(x)$

a) On cherche un nombre x_0 tel que $|f(x_0)| < 0.4$
Autrement dit tel que $x_0 \in]-0.4, 0.4[$.
Il est facile, (mais pas nécessaire!) de montrer que le minimum (M) a comme coordonnées (0.860334, 0.635867) et n'est donc pas dans cet intervalle, qui est représenté en grisé dans la figure ci-contre.
On voit bien que ce x_0 se trouve autour de 4.7
On ça donc la méthode avec $a = 4$ et $b = 5$, parce-que l'énoncé exige de partir d'un intervalle de longueur 1, et qu'il est plus facile de commencer avec des entiers.
$f(a) = 5.47235$ et $f(b) = -2.79555$
on prend $c = \frac{a+b}{2} = 4.5$ et $f(c) = 1.91963 > 0$ (donc c remplace a)
on prend $d = \frac{c+b}{2} = 4.75$ et $f(d) = -0.356513$ donc $|f(d)| < 0.4$
on propose ainsi comme réponse $\boxed{x_0 = 4.75}$ (avec deux décimales).



b) Recommençons, cette fois avec la méthode de Newton.
Comme il est recommandé de prendre une valeur initiale entière, les meilleurs choix sont 4 ou 5. Choisissons 5 comme valeur initiale
Une itération de la méthode de Newton donne alors

$$x_o = 5 - \frac{f(5)}{f'(5)} = 5 - \frac{-2.79555}{-5.07828} = \boxed{4.72}$$

Complaisons les deux résultats:
$f(4.75) = -0.357$
$f(4.72) = -0.072$