

PAM-MATHS

Examen Juin

Classe 12

3 problèmes

Mercredi 17 Juin 2026

Durée indicative: 120 min

CORRIGÉ



Total: / 45 points

Problème 1 (22 points)

Le graphe de la solution s de l'équation différentielle

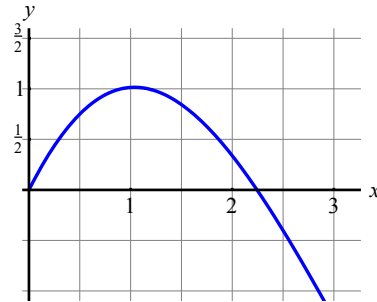
$$y' = 2 \cos(x) - y$$

qui satisfait à la condition initiale

$$s(0) = 0$$

est donné ci-contre pour $x \in [0; 3]$.

Remarque : x est en radians.



- Estimer la valeur de $s(1)$ et de $s'(1)$ à l'aide de la méthode d'Euler avec un pas $h = 0.25$. Arrondir tous les résultats au centième.
- En employant les résultats obtenus ci-dessus, expliquer pourquoi on peut supposer que le graphe de s admet un maximum d'abscisse inférieure à 1.
- On utilise la méthode d'Euler avec un pas h inconnu. On note e l'estimation de s' obtenue avec un seul pas.
 - Montrer que $e(h) = 2 \cos(h) - 2h$.
 - Pour une valeur de h voisine de 1, on a $e(h) = 0$.
 - Estimer, en utilisant une fois la méthode de Newton, la valeur h_0 telle que $e(h_0) = 0$.
 - Cette valeur diffère de celle attendue, pourquoi ?
 - Déterminer encore, avec la méthode d'Euler, une estimation de $s(2h)$ (en fonction de h).
- Déterminer la solution générale de cette équation différentielle, puis vérifier que la fonction $s(x) = \cos(x) + \sin(x) - e^{-x}$ est la solution particulière dont le graphe passe par l'origine (0;0).
- Déterminer au dixième près le zéro strictement positif de cette solution, en utilisant la méthode de la bisection.

a)

n	$x_n = y_{n-1} + h$	$y_n = y_{n-1} + F(x_n, y_n) h$	valeur approchée
0	0	0	0
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0.5
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} (2 \cos(\frac{1}{4}) - \frac{1}{2})$	0.859456
3	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} (-\frac{1}{2} + 2 \cos(\frac{1}{2}) + \frac{1}{4} (\frac{1}{2} - 2 \cos(\frac{1}{4}))) + \frac{1}{4} (2 \cos(\frac{1}{4}) - \frac{1}{2})$	1.08338
4	1	...	1.17838

Donc au centième, $s(1) = y_4 = 1.18$ et $s'(1) = F(x_4, y_4) = 2 \cos(1) - 1.1783820137... = -0.098$

- La dérivée est *négative* en x_4 et *positive* en x_3 , donc par continuité elle doit s'annuler entre 0.75 et 1, (pour une valeur de x proche de 1 puisque -0.098 est proche de zéro)

c) (1) $y_1 = y_0 + F(x_0, y_0) h = 0 + (2\cos(0) - 0)h = 2h$ et $e(h) := s'(h) = F(x_1, y_1) = 2\cos(h) - 2h$

(2) On cherche h tel que $e(h_0) = 0$, c'est à dire $2(\cos(h_0) - h_0) = 0 \Leftrightarrow \cos(h_0) - h_0 = 0$
 On va procéder comme demandé par la méthode de Newton $[x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}]$

Prenons $x_0 = 1$ (puisque l'on sait que la solution est proche de 1)

et cherchons $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{\cos(1) - 1}{-\sin(1) - 1} = 1 + \frac{\cos(1) - 1}{\sin(1) + 1} = 0.750364$

(3) La solution approchée ($h_0 \cong 0.75$) obtenue en une seule itération de la méthode de Newton vérifie assez bien la condition $e(h_0) = 0$ (car $\cos(h_0) - h_0 = -0.0189231$ est « assez proche » de zéro).
 Cependant, selon le graphique, l'abscisse du maximum est plus proche de 1 (elle vaut environ 1.03842 en recourant à la solution générale). Pour trouver un tel résultat, on devrait procéder quelques itérations supplémentaires de la méthode d'Euler.

(4) $y_2 = y_1 + F(x_1, y_1) h = 2h + (2\cos(h) - 2h)h = 2h \cos(h) - 2h^2 + 2h$
 et $e(2h) := s'(2h) = F(x_2, y_2) = 2\cos(2h) - y_2 = 2\cos(2h) - 2h \cos(h) + 2h^2 - 2h$

Remarque : En prenant $h = \frac{1}{2}$ on obtient l'approximation $s'(1) = -0.296978$, plus précise qu'en (a).

d) Recherche de la solution générale:

i) Equation homogène associée : $y' = -y$ $y_H = Ce^{-x}$

ii) Résolution de l'équation non homogène

Ansatz : $y_{NH} = C(x)e^{-x}$ donc $C'e^{-x} - Ce^{-x} = 2\cos(x) - Ce^{-x}$

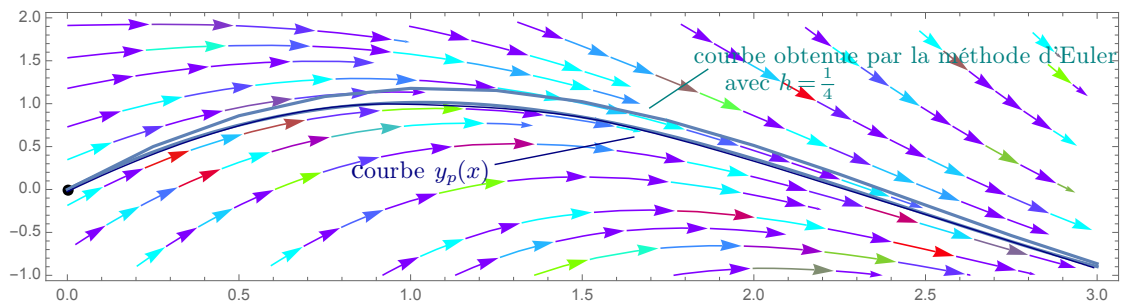
$\Rightarrow C(x) = \int 2\cos(x)e^x dx$ par partie : $C(x) = e^x(\sin(x) + \cos(x))$

Donc $y_{NH} = \sin(x) + \cos(x)$

La solution générale est $y_{gen} = y_H + y_{NH} = Ce^{-x} + \sin(x) + \cos(x)$

Enfin, la solution particulière telle que $y = 0$ quand $x = 0$ doit satisfaire

$C + 0 + 1 = 0$ donc $C = -1$ donc $y_p(x) = \sin(x) + \cos(x) - e^{-x}$ conformément à l'énoncé.



e) Méthode de la bissection : On commence avec $x_1 = 2$. $y_p(2) = 0.357815 > 0$
 on a $y_p(3) = -0.89866 < 0$

$\Rightarrow x_2 = 2.5$ et $y_p(3) = -0.284756 < 0$
 $\Rightarrow x_3 = 2.25$ et $y_p(2.25) = 0.0445003 > 0$
 $\Rightarrow x_4 = 2.375$ et $y_p(x_4) = -0.119608 < 0$
 $\Rightarrow x_5 = 2.3125$ et $y_p(x_5) = -0.0372397 < 0$
 $\Rightarrow x_6 = 2.28125$ et $y_p(x_6) = 0.00373189 > 0$
 $\Rightarrow x_7 = 2,296875$ et $y_p(x_6) = -0.0167314 < 0$

A ce niveau là on peut prédire qu'au dixième près, la meilleure estimation du zéro de $y_p(x)$ est $x = 2.3$

Problème 2 (Hivert 2017)

[/18 points]

On considère la fonction $f(x) = (x+1) \cdot \sin(2\pi x)$ avec $x \in [0;1]$.

On donne également la première et la seconde dérivée de f , $f'(x) = 2\pi(x+1)\cos(2\pi x) + \sin(2\pi x)$ et $f''(x) = 4\pi\cos(2\pi x) - 4\pi^2(x+1)\sin(2\pi x)$

a) Copier et compléter le tableau ci-dessous sur la feuille de réponses.

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
$f(x)$	0	$\frac{5}{4}$	0	$-\frac{7}{4}$	0
$f'(x)$	2π	1	-3π	-1	4π

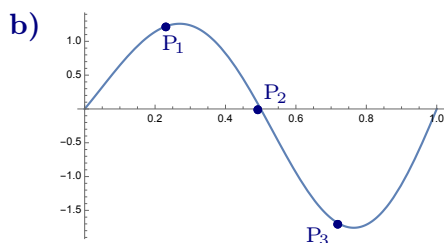
b) Tracer le graphe de f dans un repère orthonormé (pour $x \in [0;1]$), en prenant une unité égale à 4 carreaux.

c) On cherche l'abscisse du maximum de cette fonction. Pour la trouver, employer la méthode de Newton avec une valeur initiale bien choisie, et déterminer une valeur de x pour laquelle $|f'(x)| < \frac{1}{20}$. Arrêter le processus après 2 itérations au maximum, même si la condition $|f'(x)| < \frac{1}{20}$ n'est pas satisfaite.

On aimerait approcher au mieux, au sens des moindres carrés, certains points du graphe de f dont les ordonnées ont été calculées à la question a).

d) En employant la méthode des moindres carrés, déterminer l'équation de la droite de régression d'équation $y = ax + b$ qui approche les 3 points ci-dessous :
 $P_1\left(\frac{1}{4}; f\left(\frac{1}{4}\right)\right)$, $P_2\left(\frac{1}{2}; f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ et $P_3\left(\frac{3}{4}; f\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.

e) On peut approcher les 5 points de la question a) si on prend le graphe de la fonction $g(x) = a \cdot \sin(2\pi x)$, où a est une constante réelle.
 Déterminer la valeur de a qui minimise la somme des carrés des cinq distances verticales entre le graphe de g et ces points.



c) Pour trouver l'abscisse du maximum avec la méthode de Newton, il faut appliquer cette méthode à la dérivée de la fonction (et non à la fonction elle-même).

Ici on a $f'(x)$ est déjà donnée et on doit donc calculer aussi sa dérivée (donc $f''(x)$).

$$f'(x) = 2\pi(x+1)\cos(2\pi x) + \sin(2\pi x)$$

$$f''(x) = 2\pi\cos(2\pi x) - 4\pi^2(x+1)\sin(2\pi x) + 2\pi\cos(2\pi x)$$

$$\text{donc } x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)} = x_n - \frac{2\pi(x+1)\cos(2\pi x) + \sin(2\pi x)}{2\pi\cos(2\pi x) - 4\pi^2(x+1)\sin(2\pi x) + 2\pi\cos(2\pi x)}$$

Notre tableau de la question (a) montre que le premier changement de signe de $f'(x)$

a lieu entre $x = \frac{1}{4}$ et $x = \frac{1}{2}$ (de + à -, il s'agit bien d'un *maximum*)

Nous allons commencer avec $x_0 = \frac{3}{8}$ $|f'(x_0)| \cong 1.57 > \frac{1}{20}$

$$x_1 = x_0 - \frac{f'(x_0)}{f''(x_0)} = \frac{3}{8} - \frac{2\pi\left(\frac{3}{8}+1\right)\cos\left(2\pi\frac{3}{8}\right) + \sin\left(2\pi\frac{3}{8}\right)}{2\pi\cos\left(2\pi\frac{3}{8}\right) - 4\pi^2\left(\frac{3}{8}+1\right)\sin\left(2\pi\frac{3}{8}\right) + 2\pi\cos\left(2\pi\frac{3}{8}\right)} = 0.260722 \quad |f'(x_1)| \cong 0.46 > \frac{1}{20}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f'(x_1)}{f''(x_1)} = 0.260722 - \frac{2\pi(0.261+1)\cos(2\pi \cdot 0.261) + \sin(2\pi \cdot 0.261)}{2\pi\cos(2\pi x_2) - 4\pi^2(x_2+1)\sin(2\pi x_2) + 2\pi\cos(2\pi x_2)} \cong \boxed{0.26992}, |f'(x_2)| \cong 0.008 < \frac{1}{20}$$

Remarque : En partant de $x_0 = \frac{1}{3}$, ou $x_0 = \frac{1}{4}$ on obtient respectivement $x_1 = 0.2693$, $x_1 = 0.2703$, avec $|f'(x_1)| < \frac{1}{20}$

d)

n	x_n	y_n
(P_1)	1	$\frac{5}{4}$
(P_2)	2	0
(P_3)	3	$-\frac{7}{4}$
Moyenne	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$
Variance	$\frac{1}{8}$	$\frac{325}{72}$
Covariance	$-\frac{3}{4}$	

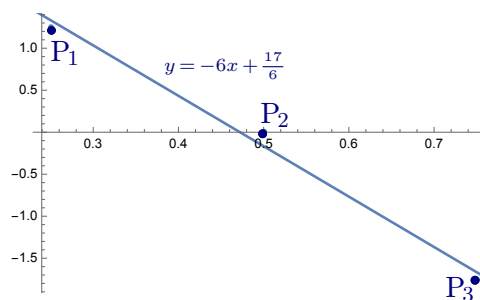
$$y = a(x - \bar{x}) + \bar{y}$$

avec pente $a = \frac{\text{covariance}}{V_x}$

$$a = \frac{-\frac{3}{4}}{\frac{1}{8}} = -6$$

donc $y = -6(x - \frac{1}{2}) - \frac{1}{6}$

$$y = -6x + \frac{17}{6}$$



e)

n	x_n	y_n	$g(x_n)$
(P_1)	1	$\frac{5}{4}$	$a \sin(2\pi \frac{1}{4}) = a$
(P_2)	2	0	$a \sin(2\pi \frac{1}{2}) = 0$
(P_3)	3	$-\frac{7}{4}$	$a \sin(2\pi \frac{3}{4}) = -a$

On cherche à minimiser

$$(g(x_1) - y_1)^2 + (g(x_2) - y_2)^2 + (g(x_3) - y_3)^2$$

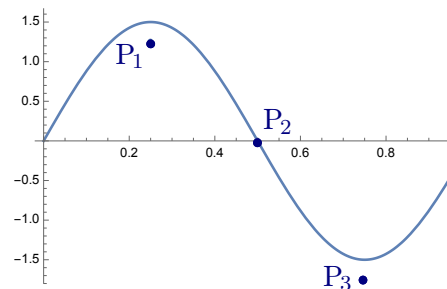
$$= \left(a - \frac{5}{4}\right)^2 + 0 + \left(-a + \frac{7}{4}\right)^2$$

on dérive par rapport à a ce qui donne

$$2\left(a - \frac{5}{4}\right) + 2\left(-a + \frac{7}{4}\right)(-1)$$

$$= 4a - 6 \quad \text{nulle pour } a = \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{3}{2} \sin(2\pi x)$$



Problème 3 (été 2016)

[/5 points]

Décomposer $\frac{13}{14}$ en somme de fractions unitaires toutes différentes (de la forme $\frac{1}{a}$ avec a entier) en détaillant les calculs.

L'arrondi entier supérieur de $\frac{14}{13}$ est $\left\lceil \frac{14}{13} \right\rceil = 2$

$$\frac{13}{14} = \frac{1}{2} + R_1$$

$$R_1 = \frac{3}{7}$$

l'arrondi entier supérieur de $\frac{7}{3}$ est $\left\lceil \frac{7}{3} \right\rceil = 3$

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + R_2$$

$$R_2 = \frac{2}{21}$$

l'arrondi entier supérieur de $\frac{21}{2}$ est $\left\lceil \frac{21}{2} \right\rceil = 11$

$$\frac{2}{21} = \frac{1}{11} + R_3$$

$$R_3 = \frac{1}{231}$$

qui est *unitaire*.

$$\Rightarrow \frac{13}{14} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{R_1}$$

$$\underbrace{\hspace{5em}}_{R_2}$$

$$\underbrace{\hspace{2em}}_{R_3}$$

