



PAM—MATHS

Examen de Pâques

Classe 12

4 problèmes

Mardi 8 Avril 2025

Durée indicative: 120min

Nom: _____

Total: / 53 points

Problème 1 (été 2020)

[/17 points]

On considère l'équation différentielle $y' = -2x \cdot y^2$ et on note $s(x)$ la solution particulière satisfaisant la condition initiale $s(0) = 1$.

- Estimer la valeur de $s(1)$ en utilisant la méthode d'Euler avec des pas de longueur $h = \frac{1}{3}$.
- Déterminer les estimations de $s(2h)$ et $s'(2h)$ en utilisant la méthode d'Euler avec des pas de longueur inconnue h .
- En remplaçant y' par $\frac{dy}{dx}$, l'équation peut s'écrire $\frac{dy}{y^2} = -2x \cdot dx$.
 - Calculer $\int \frac{dy}{y^2}$ en choisissant la solution pour laquelle la constante dans la primitive vaut 0.
 - Calculer $\int -2x \cdot dx$.
 - En déduire la solution générale de l'équation différentielle.
- Vérifier (sans avoir forcément résolu l'équation) que $s(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.
- Il existe une valeur de h , $h > 0$, telle que l'estimation de $s(2h)$ trouvée à la question b) fournit une réponse exacte. Trouver cette valeur de h .

Si l'estimation de $s(2h)$ n'a pas été trouvée, prendre $s(2h) \cong 1 - \frac{1}{2}h^2$ pour traiter cette question.
- Trouver une équation différentielle faisant intervenir x , g et g' et qui admet la fonction $g(x) = \frac{2}{x^2 + 2}$ comme solution particulière.

Problème 2 (été 2021)

[/17 points]

On donne le polynôme $p(x) = 4x^3 - 8x^2 - 53x + 84$.

- a) On aimerait trouver un zéro de ce polynôme avec la formule de Newton (méthode de la tangente). Prouver qu'en choisissant la valeur initiale $x_0 = -1$, on obtient un zéro du polynôme p en appliquant une seule fois la formule de Newton.

On considère un autre polynôme $q(x) = 4x^3 + 4x^2 - 33x - 45$.

- b) En employant le schéma de Horner, vérifier que $x_1 = 3$ est un zéro du polynôme q .
- c) Écrire le polynôme q sous forme d'un produit de polynômes du premier degré à **coefficients entiers**.
- d) On aimerait trouver le zéro $x_1 = 3$ de ce polynôme avec la méthode de la tangente. Déterminer la valeur initiale x_0 qu'il faut choisir ($x_0 \neq 3$), pour qu'on obtienne ce zéro en appliquant une seule fois la formule de Newton.

Problème 3 (hivert 2024)

[/13 points]

Ce problème est constitué de deux questions concernant des algorithmes, mais **indépendantes les unes des autres**.

- a) Déterminer le plus grand diviseur commun de 900 et de 1212 en utilisant l'algorithme d'Euclide et en détaillant les calculs.

- b) Maximiser $z = 3x + 4y$ sous les contraintes suivantes :
- $$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 6 \\ x + y \leq 10 \\ 3x + 2y \leq 24 \end{cases}$$

Représenter graphiquement les contraintes, c'est-à-dire le domaine dans lequel on peut choisir x et y . Hachurer ce domaine.

Problème 4 (été 2020)

[/6 points]

- a) Décomposer $\frac{7}{11}$ en somme de différentes fractions *unitaires* (de la forme $\frac{1}{a}$, $a \in \mathbb{N}^*$) en détaillant les calculs.
- b) Décomposer $\frac{7}{11}$ en somme de fractions unitaires dont *aucune* n'étant égale à $\frac{1}{2}$.