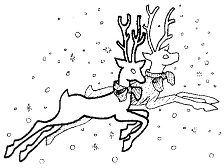


Mercredi 11 décembre 2024

PAM – MATHS

Examen de Décembre

Classe 12

5 problèmes

Réponses

Total: / 54 points

Problème 1

[/9points]

Le graphe de la solution s de l'équation différentielle

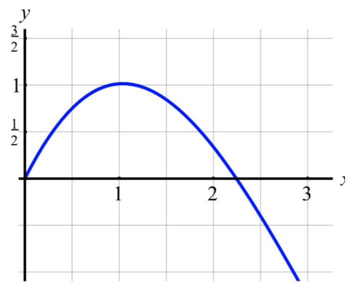
$$y' = 2\cos(x) - y$$

qui satisfait à la condition initiale

$$s(0) = 0$$

est donné ci-contre pour $x \in [0;3]$.

Remarque : x est en radians.



a) Estimer la valeur de $s(1)$ et de $s'(1)$ à l'aide de la méthode d'Euler avec un pas $h = 0.25$. Arrondir tous les résultats au centième.

b) En employant les résultats obtenus ci-dessus, expliquer pourquoi on peut supposer que le graphe de s admet un maximum d'abscisse inférieure à 1.

c) On utilise la méthode d'Euler avec un pas h inconnu.
On note e l'estimation de s' obtenue avec un seul pas.
Montrer que $e(h) = 2\cos(h) - 2h$.

Méthode d'Euler: $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h \\ f(x_{n+1}) = f(x_n) + f'(x_n)\,h \end{cases}$ avec ici $h = 0.25$ et $f'(x_n) = 2\cos(x_n) - f(x_n)$

$x_0 = 0$	$x_1 = 0.25$	$x_2 = 0.5$
$f(x_0) = 0$	$f(x_1) = 0 + (2\cos(0) - 0) \times 0.25 = 0.5$	$f(x_2) = 0.5 + (2\cos(0.25) - 0.5) \times 0.25 \cong 0.859456$

$x_3 = 0.75$	$x_4 = 1$
$f(x_3) = 0.859456 + (2\cos(0.5) - 0.859456) \times 0.25 \cong 1.08338$	$f(x_4) = 1.08338 + (2\cos(0.75) - 1.08338) \times 0.25 \cong 1.17838$

a) Notre estimation est donc : $s(1) \cong 1.18$ et $s'(1) \cong 2\cos(1) - 1.178 \cong -0.098$

b) Comme $s'(1)$ est proche de zéro, (et négatif) on en déduit que la fonction est *quasi-stationnaire* en $x = 1$ (en fait *légèrement décroissante)* et qu'elle a du être nulle pour une valeur de x légèrement inférieure à 1. (la courbe donnée confirme cette affirmation).

c)

$x_0 = 0$	$x_1 = h$
$f(x_0) = 0$	$f(x_1) = 0 + (2\cos(0) - 0) \times h = 2h$

$s'(1) = 2\cos(x_1) - f(x_1) = 2\cos(h) - 2h$

Problème 2 [/7points]

On donne l'équation différentielle $y' = x - y$ et on s'intéresse à la valeur en $x = 2$ de la solution particulière s qui passe par le point $(0;1)$.

a) Calculer cette valeur $s(2)$ en résolvant l'équation différentielle.

b) Trouver une approximation de cette valeur $s(2)$ en utilisant la méthode d'Euler avec un pas $h = \frac{1}{2}$.

a) $y' = x - y$

Eq hom: $\frac{dy}{dx} = -y \quad \Rightarrow y_H = Ce^{-x}$

Ansatz: $y_{\text{NH}} = C(x)\, e^{-x} \Rightarrow -Ce^{-x} + C'e^{-x} = x - Ce^{x} \Rightarrow C'e^{-x} = x \Rightarrow C(x) = \int x e^{x} dx = (x-1)e^{x}$

Donc $y_{\text{NH}} = (x-1)e^{x}e^{-x} = x - 1$

et $y_{\text{gen}} = y_H + y_{\text{NH}} = Ce^{-x} + x - 1$

Passe par $(0{,}1) \Leftrightarrow Ce^{-0} + 0 - 1 = 1 \Leftrightarrow C = 2$

$\Rightarrow \boxed{y_{\text{part}} = 2e^{-x} + x - 1}$

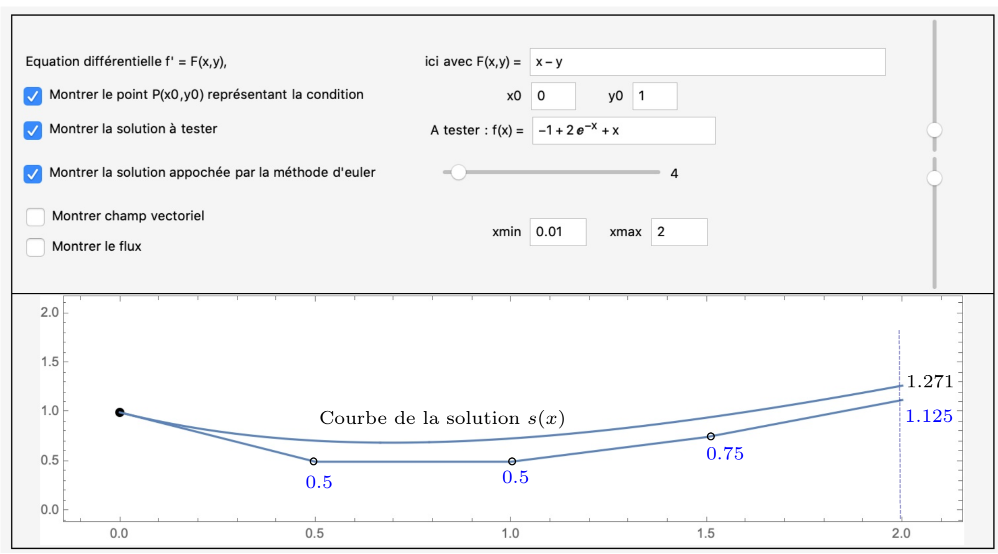
[Vérif : $y'_{\text{part}} = -2e^{-x} + 1 = -2e^{-x} - x + 1 + x = -y_{\text{part}} + x$ ok!]

Donc en nommant $s(x)$ cette solution particulière, on a : $s(2) = 2e^{-2} + 2 - 1 = \boxed{\frac{2}{e^2} + 1 \cong 1.271}$

b) Pour trouver une approximation de $s(2)$ en utilisant la méthode d'Euler à pas $h = \frac{1}{2}$, en partant de $x_0 = 0$, on doit effectuer 4 étapes.

$x_0 = 0$	$x_1 = 0.5$	$x_2 = 1$
$f(x_0) = 1$	$f(x_1) = 1 + (0-1) \times 0.5 = 0.5$	$f(x_2) = 0.5 + (0.5 - 0.5) \times 0.5 \cong 0.5$

$x_3 = 1{,}5$	$x_4 = 2$
$f(x_3) = 0.5 + (1 - 0.5) \times 0.5 \cong 0.75$	$f(x_4) = 0.75 + (1.5 - 0.75) \times 0.5 \cong 1.125$



Problème 3

[/8 points]

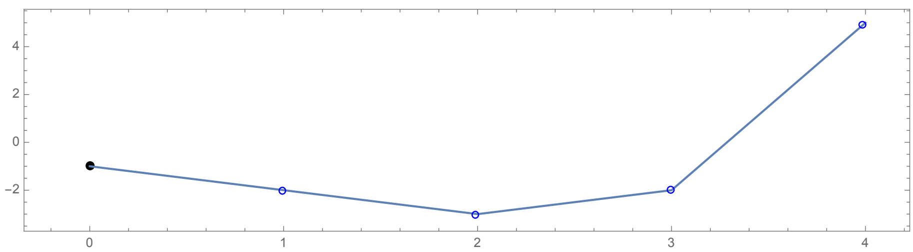
On donne $y' = x^2 + y$ avec la condition $y(0) = -1$ on veut estimer $f(4)$ en 4 pas.

On prend donc $h = 1$

a) Méthode d'Euler: $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h \\ f(x_{n+1}) = f(x_n) + f'(x_n)\,h \end{cases}$ avec ici $h = 1$ et $f'(x_n) = x_n^2 + f(x_n)$

$x_0 = 0$	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$
$f(x_0) = -1$	$f(x_1) = -1 + (0^2 + (-1)) \times 1 = -2$	$f(x_2) = -2 + (1^2 + (-2)) \times 1 \cong -3$

$x_3 = 3$	$x_4 = 4$
$f(x_3) = -3 + (2^2 + (-3)) \times 1 \cong -2$	$f(x_4) = -2 + (3^2 + (-2)) \times 1 \cong 5$



b) Résolution : $y' = x^2 + y$

Eq hom: $\frac{dy}{dx} = y \quad \Rightarrow y_H = Ce^x$

Ansatz: $y_{NH} = C(x)\,e^x \Rightarrow Ce^{-x} + C'e^x = x^2 + Ce^x \Rightarrow C'e^x = x^2$

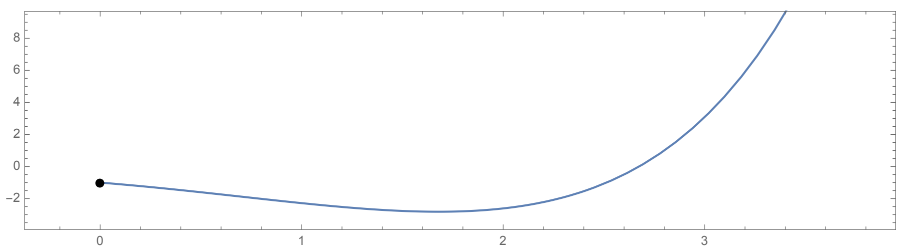
$$\Rightarrow C(x) = \int x^2\,e^{-x}dx = (-x^2 - 2\,x - 2)e^{-x}$$

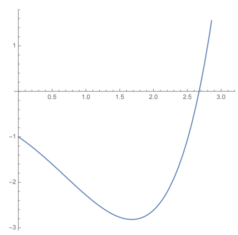
Donc $y_{NH} = (-x^2 - 2\,x - 2)e^{-x}e^x = -x^2 - 2\,x - 2$

et $y_{gen} = y_H + y_{NH} = Ce^x - x^2 - 2\,x - 2$

Passe par $(0, -1) \Leftrightarrow Ce^0 - 0^2 - 0 - 2 = -1 \Leftrightarrow C = 1$

$\Rightarrow \boxed{y_{part} = e^x - x^2 - 2\,x - 2}$





Problème 4 [/18points]

On donne $y' = \frac{y}{2x} + 1$ avec la condition $y(1) = -1$ et on veut estimer $f(4)$ en 3 pas.

On prend donc $h = 1$

a) Méthode d'Euler: $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h \\ f(x_{n+1}) = f(x_n) + f'(x_n)\,h \end{cases}$ avec ici $h = 1$ et $f'(x_n) = \frac{f(x_n)}{2x_n} + 1$

$x_0 = 1$	$x_1 = 2$	$x_2 = 3$
$f(x_0) = -1$	$f(x_1) = -1 + \left(\frac{-1}{2\times 1} + 1\right) \times 1 = -\frac{1}{2}$	$f(x_2) = -\frac{1}{2} + \left(\frac{-\frac{1}{2}}{2\times 2} + 1\right) \times 1 = \frac{3}{8}$

$x_4 = 4$
$f(x_4) = \frac{3}{8} + \left(\frac{\frac{3}{8}}{2\times 3} + 1\right) \times 1 = \frac{23}{16}$

b) $f(1+h) = f(1) + \left(\frac{f(1)}{2} + 1\right)h = -1 + \frac{1}{2}h$

$\Rightarrow \quad f'(1+h) = \frac{f(1+h)}{2(1+h)} + 1 = \frac{-1+\frac{1}{2}h}{2(1+h)} + 1 = \frac{2+2h-1+\frac{1}{2}h}{2+2h} = \frac{1+\frac{5}{2}h}{2+2h} = \frac{2+5h}{4+4h} = \frac{5h+2}{4h+4}$

$f(1+2h) = f(1+h) + \left(\frac{2+5h}{4+4h}\right)h = -1 + \frac{1}{2}h + \frac{2h+5h^2}{4+4h} = \frac{-4-4h+2h+2h^2+2h+5h^2}{4+4h} = \frac{7h^2-4}{4h+4}$

c) On veux $s(1+2h) = 0$ donc $\frac{7h^2-4}{4h+4} = 0 \Leftrightarrow 7h^2 = 4$ $h = \sqrt{\frac{4}{7}}$ $\Rightarrow$ un zero de s est $1 + 2\sqrt{\frac{4}{7}} \cong 2.51$

d) On veut $s'(1+h) = 0$ donc $\frac{5h+2}{4h+4} = 0 \Leftrightarrow 5h = -2$ $h = -\frac{2}{5} = -0.4$ $\Rightarrow$ tangente horiz en $1 - \frac{2}{5} = 0.6$

e) $y' = \frac{y}{2x} + 1$

Eq hom: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$ $\Rightarrow y_H = C\sqrt{x}$

Ansatz: $y_{NH} = C(x)\sqrt{x} \Rightarrow \frac{1}{2}C\frac{1}{\sqrt{x}} + C'\sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}}{2x} + 1 \Rightarrow C'\sqrt{x} = 1 \Rightarrow C(x) = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = 2\sqrt{x}$

Donc $y_{NH} = 2\sqrt{x}\,\sqrt{x} = 2x$

et $y_{gen} = y_H + y_{NH} = C\sqrt{x} + 2x$

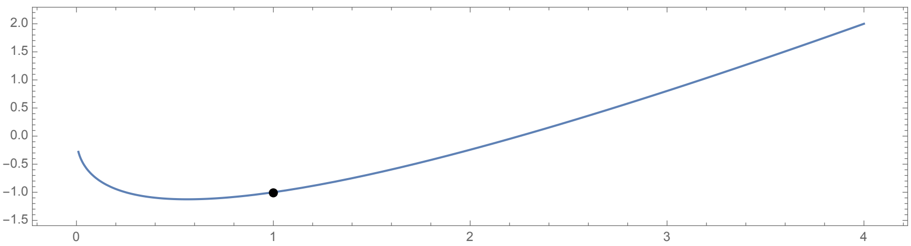
f) La courbe passe par $(1, -1) \Leftrightarrow C\sqrt{1} + 2 = -1 \Leftrightarrow C = -3$

$\Rightarrow \boxed{y_{part} = -3\sqrt{x} + 2x}$

[Vérif : $y'_{part} = -\frac{3}{2\sqrt{x}} + 2 = \frac{-3\sqrt{x}+2x}{2x} + 1 = \frac{y}{2x} + 1$ ok!]

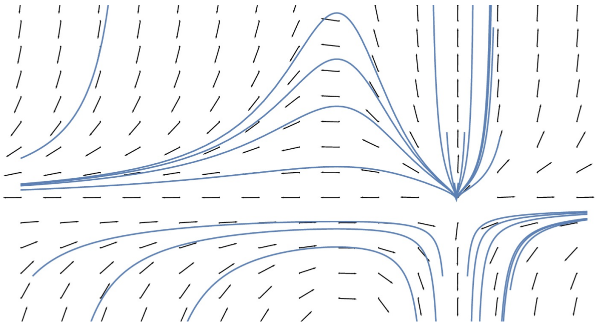
g) En nommant $s(x)$ cette solution particulière: $s = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(-3 + 2\sqrt{x}) \Leftrightarrow x = 0$ ou $\boxed{x = \frac{9}{4} \cong 9.56}$

et $s'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{y}{2x} = -1 \Leftrightarrow y = -2x \Leftrightarrow -3\sqrt{x} = -4x \Leftrightarrow \sqrt{x}(-3 + 4\sqrt{x}) \Leftrightarrow x = 0$ ou $\boxed{x = \frac{9}{16} \cong 9.56}$



Problème 5 [/12points]

On donne le champ vectoriel $\vec{V}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x-1}{y} \\ (x+1)y \end{pmatrix}$

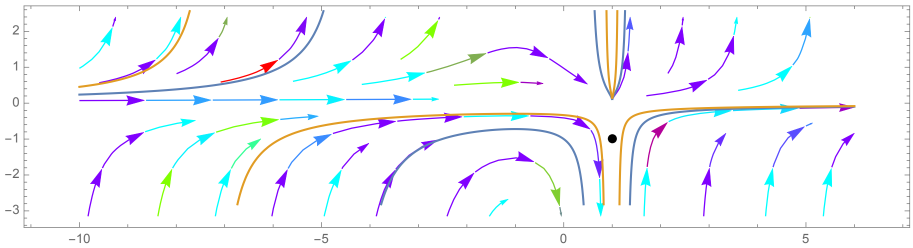


a) Les équations des courbes *tangentes* en tout point aux vecteurs du champ $\vec{V}$ sont solutions de l'équation différentielle $y' = F(x,y)$ avec ici $F(x,y) = \frac{V_y}{V_y} = \frac{(x+1)y}{\frac{x-1}{y}} = \frac{x+1}{x-1}y^2$

Résolution : $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{x-1}y^2 \Leftrightarrow \int \frac{1}{y^2}dy = \int \frac{x+1}{x-1}dx = \int \left(1 + \frac{2}{x-1}\right)dx$

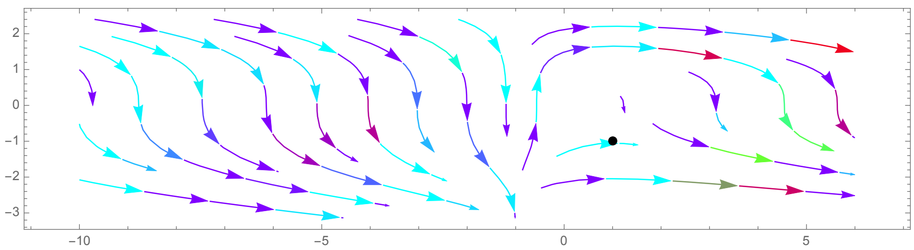
$$\Rightarrow -\frac{1}{y} = x + 2\ln|x-1| + c$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{-1}{x + 2\ln|x-1| + c}}$$



b) Un champ $\vec{W}(x,y)$ tel que $\vec{W}(x,y) \perp \vec{V}(x,y)$ en tout point (x,y)

est simplement donné par $\vec{W}(x,y) = \begin{pmatrix} \text{Vy} \\ -\text{Vy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+1)y \\ -\frac{x-1}{y} \end{pmatrix}$



c) Les équations des courbes en tout point *orthogonales* aux vecteurs du champ $\vec{V}$ sont solutions de l'équation différentielle $y' = -\frac{1}{F(x,y)}$

Résolution : $\frac{dy}{dx} = \frac{1-x}{(x+1)y^2} \Leftrightarrow \int y^2\, dy = \int \frac{1-x}{1+x}dx = \int \left(1 - \frac{2x}{1+x}\right)dx$

$$\Rightarrow \frac{y^3}{3} = x - 2\,(x - \log|x+1|) + c$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \sqrt[3]{3(x - 2\,(x - \log|x+1|) + c)}}$$