

PAM—MATHS

Examen Juin

Classe 12

3 problèmes

Mardi 17 Juin 2025

Durée indicative: 120 min

Nom: _____

Total: / 45 points

Problème 1 (22 points)

Le graphe de la solution s de l'équation différentielle

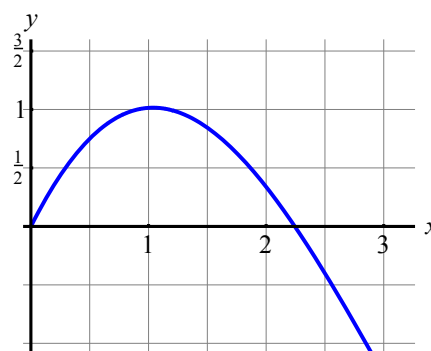
$$y' = 2 \cos(x) - y$$

qui satisfait à la condition initiale

$$s(0) = 0$$

est donné ci-contre pour $x \in [0; 3]$.

Remarque : x est en radians.



- Estimer la valeur de $s(1)$ et de $s'(1)$ à l'aide de la méthode d'Euler avec un pas $h = 0.25$. Arrondir tous les résultats au centième.
- En employant les résultats obtenus ci-dessus, expliquer pourquoi on peut supposer que le graphe de s admet un maximum d'abscisse inférieure à 1.
- On utilise la méthode d'Euler avec un pas h inconnu.
On note e l'estimation de s' obtenue avec un seul pas.
 - Montrer que $e(h) = 2 \cos(h) - 2h$.
Pour une valeur de h voisine de 1, on a $e(h) = 0$.
 - Estimer, en utilisant une fois la méthode de Newton, la valeur h_0 telle que $e(h_0) = 0$.
 - Cette valeur diffère de celle attendue, pourquoi ?
 - Déterminer encore, avec la méthode d'Euler, une estimation de $s(2h)$ (en fonction de h).
- Déterminer la solution générale de cette équation différentielle, puis vérifier que la fonction $s(x) = \cos(x) + \sin(x) - e^{-x}$ est la solution particulière dont le graphe passe par l'origine (0;0).
- Déterminer au dixième près le zéro strictement positif de cette solution, en utilisant la méthode de la bisection.

Problème 2 (Hivert 2017)

[/18 points]

On considère la fonction $f(x) = (x+1) \cdot \sin(2\pi x)$ avec $x \in [0;1]$.

On donne également la première et la seconde dérivée de f , $f'(x) = 2\pi(x+1)\cos(2\pi x) + \sin(2\pi x)$ et $f''(x) = 4\pi\cos(2\pi x) - 4\pi^2(x+1)\sin(2\pi x)$

a) Copier et compléter le tableau ci-dessous sur la feuille de réponses.

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
$f(x)$					
$f'(x)$					

b) Tracer le graphe de f dans un repère orthonormé (pour $x \in [0;1]$), en prenant une unité égale à 4 carreaux.

c) On cherche l'abscisse du maximum de cette fonction. Pour la trouver, employer la méthode de Newton avec une valeur initiale bien choisie, et déterminer une valeur de x pour laquelle $|f'(x)| < \frac{1}{20}$. Arrêter le processus après 2 itérations au maximum, même si la condition $|f'(x)| < \frac{1}{20}$ n'est pas satisfaite.

On aimerait approcher au mieux, au sens des moindres carrés, certains points du graphe de f dont les ordonnées ont été calculées à la question a).

d) En employant la méthode des moindres carrés, déterminer l'équation de la droite de régression d'équation $y = ax + b$ qui approche les 3 points ci-dessous :

$$P_1\left(\frac{1}{4}; f\left(\frac{1}{4}\right)\right), P_2\left(\frac{1}{2}; f\left(\frac{1}{2}\right)\right) \text{ et } P_3\left(\frac{3}{4}; f\left(\frac{3}{4}\right)\right).$$

e) On peut approcher les 5 points de la question a) si on prend le graphe de la fonction $g(x) = a \cdot \sin(2\pi x)$, où a est une constante réelle.

Déterminer la valeur de a qui minimise la somme des carrés des cinq distances verticales entre le graphe de g et ces points.

Problème 3 (été 2016)

[/5 points]

Décomposer $\frac{13}{14}$ en somme de fractions unitaires toutes différentes

(de la forme $\frac{1}{a}$ avec a entier) en détaillant les calculs.