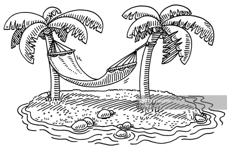


PAM−MATHS

Examen Juin

Classe 12

3 problèmes

Mardi 17 Juin 2025

Durée indicative: 120 min

CORRIGE

Total: / 45 points

Problème 1 (22 points)

Le graphe de la solution s de l'équation différentielle

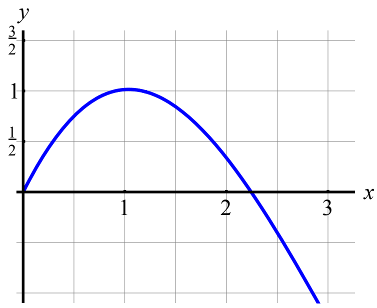
$$y' = 2\cos(x) - y$$

qui satisfait à la condition initiale

$$s(0) = 0$$

est donné ci-contre pour $x \in [0;3]$.

Remarque : x est en radians.



a) Estimer la valeur de $s(1)$ et de $s'(1)$ à l'aide de la méthode d'Euler avec un pas $h = 0.25$. Arrondir tous les résultats au centième.

b) En employant les résultats obtenus ci-dessus, expliquer pourquoi on peut supposer que le graphe de s admet un maximum d'abscisse inférieure à 1.

c) On utilise la méthode d'Euler avec un pas h inconnu. On note e l'estimation de s' obtenue avec un seul pas.

1. Montrer que $e(h) = 2\cos(h) - 2h$.

Pour une valeur de h voisine de 1, on a $e(h) = 0$.

2. Estimer, en utilisant une fois la méthode de Newton, la valeur h_0 telle que $e(h_0) = 0$.
3. Cette valeur diffère de celle attendue, pourquoi ?
4. Déterminer encore, avec la méthode d'Euler, une estimation de $s(2h)$ (en fonction de h).

d) Déterminer la solution générale de cette équation différentielle, puis vérifier que la fonction $s(x) = \cos(x) + \sin(x) - e^{-x}$ est la solution particulière dont le graphe passe par l'origine (0;0).

e) Déterminer au dixième près le zéro strictement positif de cette solution, en utilisant la méthode de la bissection.

a)

n	$x_n = y_{n-1} + h$	$y_n = y_{n-1} + F(x_n, y_n)\,h$	valeur approchée
0	0	0	0
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0.5
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(2\cos\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}\right)$	0.859456
3	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2} + 2\cos\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - 2\cos\left(\frac{1}{4}\right)\right)\right) + \frac{1}{4}\left(2\cos\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}\right)$	1.08338
4	1	$\ldots$	1.17838

Donc au *centième*, $\boxed{s(1) = y_4 = 1.18}$ et $s'(1) = F(x_4, y_4) = 2\cos(1) - 1.1783820137\ldots = \boxed{-0.098}$

b) La dérivée est *négative* en x_4 et *positive* en x_3, donc par continuité elle doit s'annuler entre 0.75 et 1, (pour une valeur de x proche de 1 puisque -0.098 est proche de zéro)

c) (1) $y_1 = y_0 + F(x_0, y_0)\,h = 0 + (2\cos(0) - 0)h = \boxed{2h}$ et $e(h) := s'(h) = F(x_1, y_1) = \boxed{2\cos(h) - 2h}$

(2) On cherche h tel que $e(h) = 0$, c'est à dire $2(\cos(h) - h) = 0 \Leftrightarrow \cos(h) - h = 0$

On va procéder comme demandé par la méthode de Newton [$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$]

Prenons $x_0 = 1$ (puisque l'on sait que la solution est proche de 1)

et cherchons $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{\cos(1) - 1}{-\sin(1)} = 1 + \frac{\cos(1) - 1}{\sin(1)} = \boxed{0.453698}$

(3) La solution approchée ($h = 0.453698$) n'est pas très satisfaisante parce-que la valeur de $f'(1)$ est « petite » ($\sin(1) \cong 0.84$) = ce qui rend $-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ assez « grand ».

Si l'on remplace cette solution : $\cos(0.45369) - 0.45369 = 0.445$

Il faudrait une seconde itération pour avoir une solution plus satisfaisante

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.45369 + \frac{\cos(0.45369) - 0.45369}{\sin(0.45369)} = 1.46934$ qui est cette fois bien entre x_3 et x_4.

(4) $y_2 = y_1 + F(x_1, y_1)\,h = 2h + (2\cos(h) - 2h)h = \boxed{2h\cos(h) - 2h^2 + 2h}$

et $e(2h) := s'(2h) = F(x_2, y_2) = 2\cos(2h) - y_2 = \boxed{2\cos(2h) - 2h\cos(h) + 2h^2 - 2h}$

Remarque : En prenant $h = \frac{1}{2}$ on obtient l'approximation $s'(1) = -0.296978$, plus précise qu'en (a).

d) Recherche de la *solution générale*:

i) Equation *homogène* associée : $y' = -y \qquad y_H = Ce^{-x}$

ii) Résolution de l'équation *non homogène*

Ansatz : $y_{\text{NH}} = C(x)\,e^{-x}$ donc $C'e^{-x} - Ce^{-x} = 2\cos(x) - Ce^{-x}$

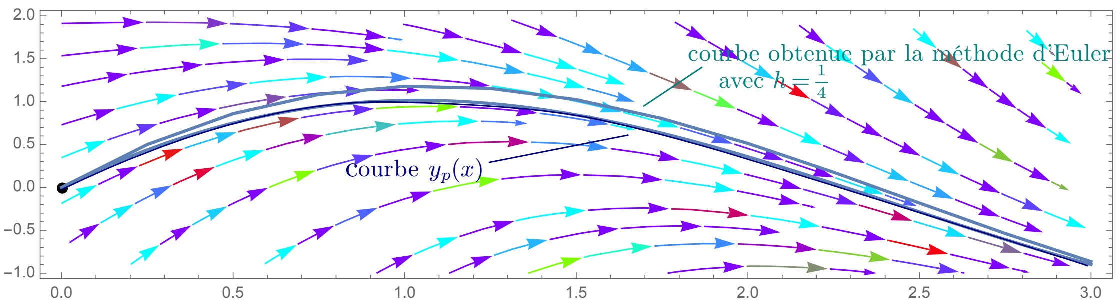
$\Rightarrow C(x) = \int 2\cos(x)e^x dx$ par partie : $C(x) = e^x(\sin(x) + \cos(x))$

Donc $y_{\text{NH}} = \frac{1}{2}(\sin(x) + \cos(x))$

La solution générale est $\boxed{y_{\text{gen}} = y_H + y_{\text{NH}} = Ce^{-x} + \sin(x) + \cos(x)}$

Enfin, la solution particulière telle que $y = 0$ quand $x = 0$ doit satisfaire

$C + 0 + 1 = 0$ donc $C = -1$ donc $\boxed{y_p(x) = \sin(x) + \cos(x) - e^{-x}}$ conformément à l'énoncé.



e) Méthode de la bissection : On commence avec $x_1 = 2$. on a $y_p(2) = 0.357815 > 0$ et $y_p(3) = -0.89866 < 0$

$\Rightarrow x_2 = 2.5$ et $y_p(3) = -0.284756 < 0$

$\Rightarrow x_3 = 2.25$ et $y_p(2.25) = 0.0445003 > 0$

$\Rightarrow x_4 = 2.375$ et $y_p(x_4) = -0.119608 < 0$

$\Rightarrow x_5 = 2.3125$ et $y_p(x_5) = -0.0372397 < 0$

$\Rightarrow x_6 = 2.28125$ et $y_p(x_6) = 0.00373189 > 0$

$\Rightarrow x_7 = 2,296875$ et $y_p(x_6) = -0.0167314 < 0$

A ce niveau là on peut prédire qu'au *dixième* près, la meilleure estimation du zéro de $y_p(x)$ est $\boxed{x = 2.3}$

Problème 2 (Hivert 2017) [/18 points]

On considère la fonction $f(x)=(x+1)\cdot\sin(2\pi x)$ avec $x\in[0;1]$.

On donne également la première et la seconde dérivée de f, $f'(x)=2\pi(x+1)\cos(2\pi x)+\sin(2\pi x)$ et $f''(x)=4\pi\cos(2\pi x)-4\pi^2(x+1)\sin(2\pi x)$

a) Copier et compléter le tableau ci-dessous sur la feuille de réponses.

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
$f(x)$					
$f'(x)$					

b) Tracer le graphe de f dans un repère orthonormé (pour $x\in[0;1]$), en prenant une unité égale à 4 carreaux.

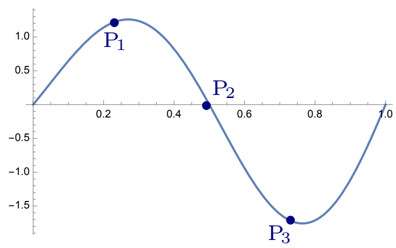
c) On cherche l'abscisse du maximum de cette fonction. Pour la trouver, employer la méthode de Newton avec une valeur initiale bien choisie, et déterminer une valeur de x pour laquelle $|f'(x)|<\frac{1}{20}$. Arrêter le processus après 2 itérations au maximum, même si la condition $|f'(x)|<\frac{1}{20}$ n'est pas satisfaite.

On aimerait approcher au mieux, au sens des moindres carrés, certains points du graphe de f dont les ordonnées ont été calculées à la question a).

d) En employant la méthode des moindres carrés, déterminer l'équation de la droite de régression d'équation $y=ax+b$ qui approche les 3 points ci-dessous :
$P_1\left(\frac{1}{4};f\left(\frac{1}{4}\right)\right)$, $P_2\left(\frac{1}{2};f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ et $P_3\left(\frac{3}{4};f\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.

e) On peut approcher les 5 points de la question a) si on prend le graphe de la fonction $g(x)=a\cdot\sin(2\pi x)$, où a est une constante réelle.
Déterminer la valeur de a qui minimise la somme des carrés des cinq distances verticales entre le graphe de g et ces points.

b)



c) Pour trouver l'abscisse du maximum avec la méthode de Newton, il faut appliquer cette méthode à la dérivée de la fonction (et non à la fonction elle même).
Ici on a $f'(x)$ est déjà donnée et on doit donc calculer aussi sa dérivée (donc $f''(x)$).

$f'(x)=2\pi(x+1)\cos(2\pi x)+\sin(2\pi x)$

$f''(x)=2\pi\cos(2\pi x)-4\pi^2(x+1)\sin(2\pi x)+2\pi\cos(2\pi x)$

donc $x_{n+1}=x_n-\frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}=x_n-\frac{2\pi(x+1)\cos(2\pi x)+\sin(2\pi x)}{2\pi\cos(2\pi x)-4\pi^2(x+1)\sin(2\pi x)+2\pi\cos(2\pi x)}$

Notre tableau de la question (a) montre que le premier changement de signe de $f'(x)$ a lieu entre $x=\frac{1}{4}$ et $x=\frac{1}{2}$ (de $+$ à $-$, il s'agit bien d'un maximum)
Nous allons commencer avec $x_1=\frac{3}{8}$ $|f'(x_1)|\cong 1.57>\frac{1}{20}$

$$x_2=x_1-\frac{f'(x_1)}{f''(x_1)}=\frac{3}{8}-\frac{2\pi\left(\frac{3}{8}+1\right)\cos\left(2\pi\frac{3}{8}\right)+\sin\left(2\pi\frac{3}{8}\right)}{2\pi\cos\left(2\pi\frac{3}{8}\right)-4\pi^2\left(\frac{3}{8}+1\right)\sin\left(2\pi\frac{3}{8}\right)+2\pi\cos\left(2\pi\frac{3}{8}\right)}=0.260722 \quad |f'(x_2)|\cong 0.46>\frac{1}{20}$$

$$x_3=x_2-\frac{f'(x_2)}{f''(x_2)}=0.261-\frac{2\pi(0.261+1)\cos(2\pi 0.261)+\sin(2\pi 0.261)}{2\pi\cos(2\pi x_2)-4\pi^2(x_2+1)\sin(2\pi x_2)+2\pi\cos(2\pi x_2)}\cong\boxed{0.27},\ |f'(x_3)|\cong 0.008<\frac{1}{20}$$

d)

	n	x_n	y_n
(P_1)	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$
(P_2)	2	$\frac{1}{2}$	0
(P_2)	3	$\frac{3}{4}$	$-\frac{7}{4}$
moyenne		$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$
Variance		$\frac{1}{8}$	$\frac{325}{72}$
covariance		$\frac{-3}{4}$	

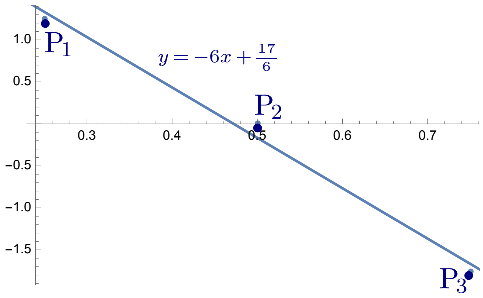
$y = a(x - \bar{x}) + \bar{y}$

avec pente $a = \frac{\text{covariance}}{V_x}$

$$a = \frac{\frac{-3}{4}}{\frac{1}{8}} = -6$$

donc $y = -6(x - \frac{1}{2}) - \frac{1}{6}$

$$\boxed{y = -6x + \frac{17}{6}}$$



e)

	n	x_n	y_n	$g(x_n)$
(P_1)	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	$a\sin(2\pi\frac{1}{4}) = a$
(P_2)	2	$\frac{1}{2}$	0	$a\sin(2\pi\frac{1}{2}) = 0$
(P_2)	3	$\frac{3}{4}$	$-\frac{7}{4}$	$a\sin(2\pi\frac{3}{4}) = -a$

On cherche à minimiser

$(g(x_1) - y_1)^2 + (g(x_2) - y_2)^2 + (g(x_3) - y_3)^2$

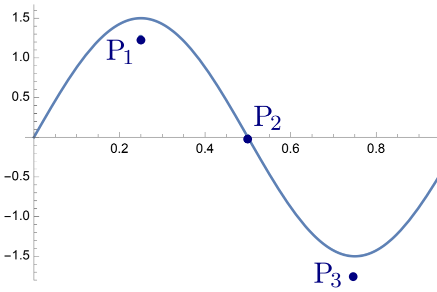
$= \left(a - \frac{5}{4}\right)^2 + 0 + \left(-a + \frac{7}{4}\right)^2$

on dérive par rapport à a ce qui donne

$2\left(a - \frac{5}{4}\right) + 2\left(-a + \frac{7}{4}\right)(-1)$

$= 4a - 6$ nulle pour $\boxed{a = \frac{3}{2}}$

$$\boxed{y = \frac{3}{2}\sin(2\pi x)}$$



Problème 3 (été 2016) [/5 points]

Décomposer $\frac{13}{14}$ en somme de fractions unitaires toutes différentes (de la forme $\frac{1}{a}$ avec a entier) en détaillant les calculs.

L'arrondi entier supérieur de $\frac{14}{13}$ est $\left\lceil \frac{14}{13} \right\rceil = 2$

$\frac{13}{14} = \frac{1}{2} + R_1$ $R_1 = \frac{3}{7}$ l'arrondi entier supérieur de $\frac{7}{3}$ est $\left\lceil \frac{7}{3} \right\rceil = 3$

$\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + R_2$ $R_2 = \frac{2}{21}$ l'arrondi entier supérieur de $\frac{21}{2}$ est $\left\lceil \frac{21}{2} \right\rceil = 11$

$\frac{2}{21} = \frac{1}{11} + R_3$ $R_3 = \frac{1}{231}$ qui est *unitaire*.

$$\Rightarrow \frac{13}{14} = \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \underbrace{\frac{1}{11} + \underbrace{\frac{1}{231}}_{R_3}}_{R_2}}_{R_1}$$