Polynômes, division Euclidienne et méthode d'Horner

I] Un peu de théorie

Considérons $P(x)$ un polynôme en x, de degré n $(n \in \mathbb{N}^+)$

Remarques

i) Pour tout nombre *réel* a, il est possible d'écrire $P(x)=Q(x)(x-a)+R$
Dans le cas où a est une *racine* (un *zéro*) de $P(x)$, on a $R=0$, sinon $R \neq 0$

ii) Dans les deux cas, $R=P(a)$

Définition: x_0 est racine de *multiplicité* m $(m \in \mathbb{N}^+)$) $\Leftrightarrow P(x)$ *divisible* par $(x-x_0)^m$
$\Leftrightarrow P(x)=Q(x).(x-x_0)^m$

Théorème : si x_0 est racine de multiplicité $m=1$ alors $P'(x_0)=Q(x_0)$
si x_0 est racine de multiplicité $m>1$ alors $P'(x_0)=0$

Démonstration : $P'(x)=Q'(x).(x-x_0)^m \;+\; Q(x).m(x-x_0)^{m-1}$
en particulier si $m=1$: $P'(x)=Q'(x).(x-x_0)+\; Q(x)$
et dans ce cas $P'(x_0)=Q(x_0)$
alors que si $m>1$ on obtient: $P'(x_0)=Q(x_0)\times 0 = 0$

Formule à la base de la méthode de Horner (facultatif) : $p_k = q_{k-1} - x_0\, q_k \quad (n<k<0)$

II] Exemple de questions impliquant (entre autres) les relations ci-dessus

Question 1 :

Soit $P(x)=x^3-3x^2+(c+2)x-c \quad (c \in \mathbb{R})$
La pente de la tangente en $x=1$ à la courbe d'équation $y=P(x)$ vaut 2. Trouver c.

Question 2 : (Matu été 2013)

On dit que le nombre z est un *zéro double* du polynôme $P(x)$
si celui-ci peut s'écrire sous la forme $P(x)=(x-z)^2\cdot Q(x)$,
où $Q(x)$ est un polynôme dont z n'est pas un zéro.

a) Montrer que si z est un zéro double du polynôme $P(x)$,
alors z est également un zéro du polynôme $P'(x)$ (la dérivée de $P(x)$).

b) Expliquer pourquoi un zéro double d'un polynôme ne peut pas être calculé ou approché à l'aide de l'algorithme de la bissection.

c) Ecrire le polynôme $P(x)=12x^3-52x^2+75x-36$ sous forme d'un produit de polynômes du premier degré à coefficients entiers, sachant que $P(x)$ possède un *zéro double*.
Utiliser le résultat de la question a) et employer le schéma de Horner.

Question 3 : (Matu été 2024)

On considère les polynômes P et S donnés par
$P(x)=12x^3+20x^2-27x-45$ et $S(x)=12x^3+20x^2+3x+5$.

Ecrire le polynôme P sous la forme d'un produit de 3 polynômes du premier degré à coefficients entiers, sachant qu'un des zéros de P est également un zéro de s.