

Question 1 :

Soit $P(x) = x^3 - 3x^2 + (c+2)x - c$ ($c \in \mathbb{R}$)

La pente de la tangente en $x_0 = 1$ à la courbe d'équation $y = P(x)$ vaut 2. Trouver c .

Méthode classique

On dérive $P'(x)$ et résoud l'équation $P'(1) = 2$

$$P'(x) = 3x^2 - 6x + c + 2$$

$$P'(1) = c - 1 \Rightarrow c - 1 = 2 \Rightarrow \boxed{c = 3}$$

Méthode utilisant le théorème sur $P'(x)$

$$P(1) = 1 - 3 + (c+2) - c = 0$$

$\Rightarrow P(x)$ divisible par $(x-1)$

cherchons $Q(x)$ tel que $P(x) = Q(x)(x-1)$

1	-3	$c+2$	$-c$
↓	2	-2	$-c$
1	-2	c	0

$$\Rightarrow Q(x) = x^2 - 2x + c$$

$$Q(1) \neq 0 \text{ donc } m = 1$$

Par le théorème, $P'(x_0) = Q(x_0)$ avec $x_0 = 1$

$$\text{donc } 2 = Q(1) = c - 1 \Rightarrow \boxed{c = 3}$$

Question 2 : (Matu été 2013)

- a) Montrer que si z est un *zéro double* du polynôme $P(x)$,
alors z est également un zéro du polynôme $P'(x)$ (la dérivée de $P(x)$).

Il s'agit de la démonstration de théorème (avec $x_0 = z$), dans le cas particulier où $m = 2$

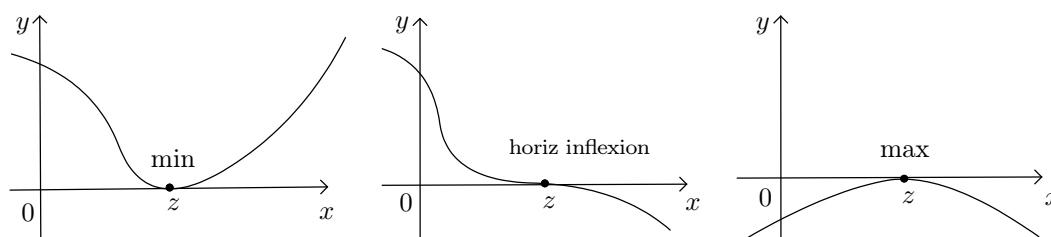
$$P(x) = Q(x)(x-z)^2 \Rightarrow P'(x) = Q'(x)(x-z)^2 + 2Q(x)(x-z)$$

donc $P(z) = 0$. Il s'en suit que z est bien un zéro du polynôme $P'(x)$.

- b) Pourquoi un zéro double d'un polynôme ne peut pas être calculé
ou approché à l'aide de l'algorithme de la bisection ?

Si la racine $x = z$ est de multiplicité $m > 1$, non seulement $P(z) = 0$, mais aussi $P'(z) = 0$
ainsi que les dérivées les suivantes jusqu'à $P^{(m)}(z)$ qui sont également nulles.

Il s'en suit que non seulement la courbe touche l'axe des abscisse en $x = z$, mais aussi
que sa tangente est horizontale en ce point, ce qui donne les 3 possibilités suivantes :



Dans la cas où la multiplicité est exactement $m = 2$, seule $f(z)$ et $f'(z)$ sont nulles et donc pas
les suivantes, ce qui exclu la possibilité du point d'inflexion.

Dans ce cas, il n'y a pas de changement de signe autour de z , c'est dire que pour un assez *petit*
intervalle $a < z < b$, on a $f(a)f(b) > 1$, $\Rightarrow$ la méthode de bisection ne marche plus !

- c) Ecrire le polynôme $P(x) = 12x^3 - 52x^2 + 75x - 36$ sous forme d'un produit de polynômes du premier degré à coefficients entiers, sachant que $P(x)$ possède un *zéro double*.

Utiliser le résultat de la question a) et employer le schéma de Horner.

On a dérivé $P(x)$ en classe : $P'(x) = 36x^2 - 104x + 75$, polynôme de second degré avec $\Delta = 16$

Ses racines (zéros) sont $\frac{254}{18}$ et $\frac{3}{2}$

Selon notre théorème : si x_0 est un *zéro double* de $P(x)$ alors $P'(x_0) = 0$

Il s'en suit que le *zéro double* de $P(x)$ est l'un des deux zéros de $P'(x)$: $\frac{25}{18}$ ou $\frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} \text{C'est bien le cas de } \frac{3}{2}, \text{ car } P\left(\frac{3}{2}\right) &= 12\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 52\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 75\left(\frac{3}{2}\right) - 36 \\ &= 12\left(\frac{27}{8}\right) - 52\left(\frac{9}{4}\right) + 75\left(\frac{3}{2}\right) - 36 \\ &= \frac{3 \times 27}{2} - \frac{26 \times 9}{2} + \frac{225}{2} - 36 \\ &= \frac{81 - 234 + 225 - 72}{2} = 0 \end{aligned}$$

$\frac{3}{2}$ est donc racine double $\Rightarrow$ On peut donc diviser deux fois $P(x)$ par $\left(x - \frac{3}{2}\right)$

méthode 1 : appliquer deux fois Horner méthode 1 : division euclidienne
(c'est ce qui est demandé dans cette question !)

12	-52	75	-36
↓	18	-51	36
12	-34	24	0

quotient intermédiaire : $12x^2 - 34x + 24$

12	-34	24
↓	18	-24
12	-16	0

$$\Rightarrow Q(x) = 12x - 16$$

$$\begin{array}{r} 12x^3 - 52x^2 + 75x - 36 \mid x^2 - 3x + \frac{9}{4} \\ 12x - 16 \\ \hline -(12x^3 - 36x^2 + 27x) \\ -16x^2 + 48x - 36 \\ -(16x^2 + 48x - 36) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow Q(x) = 12x - 16$$

Conclusion : $P(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 (12x - 16) = 4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 (3x - 4) = \boxed{(2x - 3)^2 (3x - 4)}$

Vérification : $(2x - 3)^2 (3x - 4) = (4x^2 - 6x + 9)(3x - 4) = 12x^3 - 52x^2 + 75x - 36$

Question 3 : (Matu été 2024)

On considère les polynômes P et S donnés par

$$P(x) = 12x^3 + 20x^2 - 27x - 45 \text{ et } S(x) = 12x^3 + 20x^2 + 3x + 5.$$

Ecrire le polynôme P sous la forme d'un produit de 3 polynômes du premier degré à coefficients entiers, sachant qu'un des zéros de P est également un zéro de S .

$$\frac{S}{P} = 1 + \frac{30x + 90}{P} \Leftrightarrow S = P + 10(3x + 5) \quad \text{donc la racine commune est } -\frac{5}{3}$$

12	20	-27	-45
	-20	0	45
12	0	-27	0

$$P(x) = \left(x + \frac{5}{3}\right)(12x^2 - 27) = 3\left(x + \frac{5}{3}\right)(4x^2 - 9) = (3x + 5)(2x - 3)(2x + 3)$$