12 PAM **Test 3** Lundi 27 Janvier 2025

Méthodes de la bissection et de Newton

……./ 20 points Réponses

Question 1

[8 points]

a) $\sqrt{2}$ est la solution de l'équation $x^2-2=0$ que l'on désire approximer avec la méthode de *Newton*.

On prend ici comme valeur initiale $x_0=1$ et on va effectuer 3 itérations.

$x_0=1$

$$\boxed{x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}} \qquad f(x)=x^2-2 \quad \Rightarrow \quad f'(x)=2x \qquad \text{et}$$

$$x_1=1-\frac{1^2-2}{2\times 1}=1+\frac{1}{2}=\boxed{\frac{3}{2}} \qquad (=1.5)$$

$$x_2=\frac{3}{2}-\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2-2}{2\times\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}-\frac{\frac{1}{4}}{3}=\boxed{\frac{17}{12}} \qquad (=1.41\bar{6})$$

$$x_3=\frac{17}{12}-\frac{\left(\frac{17}{12}\right)^2-2}{2\times\frac{17}{12}}=\frac{17}{12}-\frac{\frac{1}{144}}{\frac{17}{6}}=\frac{17}{12}-\frac{1}{408}=\boxed{\frac{577}{408}} \qquad (\simeq 1,414216)$$

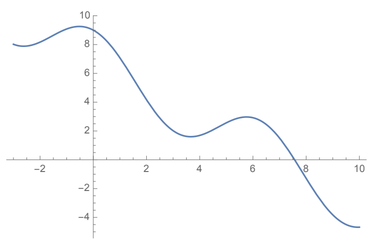
Les résultats obtenus à l'aide d'une application (à 20 c.s) montrent la rapidité de cette méthode

n	x_n
0	1
1	1.5000000000000000000
2	1.4166666666666666667
3	1.4142156862745098039
4	1.4142135623746899106
5	1.4142135623730950488
6	1.4142135623730950488

b) On donne la fonction $f(x)=2\cos(x)-x+7$.

On nous demande de déterminer un nombre x tel que $|f(x)|<0.1$, avec la méthode de la *bissection*.

La figure ci-contre montre que la courbe $y=f(x)$ ne coupe qu'une fois l'axe des abscisse, quelque part entre 7 et 8.
Ceci peut être déduit *sans* calculatrice graphique en considérant que $-x+7=0$ pour $x=7$ et que $\cos(7)>0$, donc $f(7)>0$ (mais proche de 0) alors que $f(8)<0$ (et aussi proche de 0).



$a<x<b$ avec $a=7$ et $b=8$ intervalle (a,b) de longuer 1

$x_1=\frac{15}{2}$ $\quad f(x_1)>0 \Rightarrow x_2$ milieu de $\left(\frac{15}{2},8\right)$ intervalle de longueur $\frac{1}{2}$ avec $|f(x_1)|\cong 0.193>0.1$

$x_2=\frac{31}{4}$ $\quad f(x_1)<0 \Rightarrow x_3$ milieu de $\left(\frac{15}{2},\frac{31}{4}\right)$ intervalle de longueur $\frac{1}{4}$ avec $|f(x_2)|\cong 0.54>0.1$

$x_3=\frac{61}{8}$ $\quad f(x_3)<0 \Rightarrow x_4$ milieu de $\left(\frac{15}{2},\frac{61}{8}\right)$ intervalle de longueur $\frac{1}{8}$ avec $|f(x_3)|\cong 0.17>0.1$

$x_4=\frac{121}{16}$ $\quad f(x_4)>0 \Rightarrow x_5$ milieu de $\left(\frac{121}{16},\frac{61}{8}\right)$ intervalle de longueur $\frac{1}{16}$ avec $|f(x_4)|\cong 0.012>0.1$

$x_5=\frac{243}{32}$ $\quad f(x_5)>0 \Rightarrow x_6$ milieu de $\left(\frac{123}{16},\frac{31}{4}\right)$ intervalle de longueur $\frac{1}{32}$ avec $|f(x_5)|\cong 0.079<0.1$

L'approximation demandée de la solution est donc $x_5=7.59375$

Question 2 [12 points]

On aimerait calculer des estimations du nombre $\ln(2)$ en employant différents algorithmes.

remarque
$\ln(2) \cong 0.69314718$

a) Esquisser le graphe de la fonction $f(x) = e^x - 2$, puis résoudre l'équation $f(x) = 0$ en employant la méthode de la bissection. On arrêtera les calculs dès qu'on aura trouvé un intervalle de longueur inférieure ou égale à $\frac{1}{100}$ et contenant la solution.

b) Résoudre l'équation $f(x) = 0$ en employant cette fois la méthode de Newton et en prenant comme valeur initiale $x_0 = 3$. Noter les termes successifs de la suite de Newton jusqu'à ce que cette suite soit constante lorsqu'on travaille avec 3 chiffres significatifs, c'est-à-dire avec des résultats arrondis au millième.

c) Observer que la fonction $y = \ln(x)$ est la solution de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{x}$ satisfaisant la condition initiale $y(1) = 0$, puis calculer une estimation de $y(2)$ en employant la méthode d'Euler avec un pas $h = 0.25$. On arrondira à nouveau les résultats au millième.

a) On peut facilement montrer que f s'annule pour x tel que $a < x < b$ avec $a = 0$ et $b = 1$ l'intervalle (a, b) étant de longuer 1

$x_1 = \frac{1}{2}$ $\quad f(x_1) < 0 \Rightarrow x_2$ milieu de $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, de longueur $\frac{1}{2}$

$x_2 = \frac{3}{4}$ $\quad f(x_2) > 0 \Rightarrow x_2$ milieu de $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, de longueur $\frac{1}{4}$

$x_3 = \frac{5}{8}$ $\quad f(x_3) < 0 \Rightarrow x_2$ milieu de $\left(\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right)$, de longueur $\frac{1}{8}$

$x_4 = \frac{11}{16}$ $\quad f(x_4) < 0 \Rightarrow x_2$ milieu de $\left(\frac{11}{16}, \frac{3}{4}\right)$ " " longuer $\frac{1}{16}$

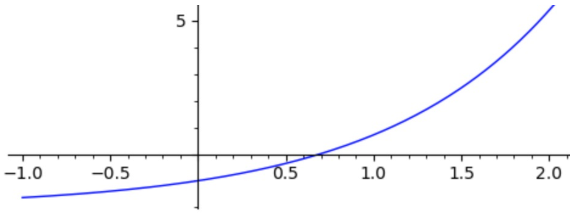
$x_5 = \frac{23}{32}$ $\quad f(x_5) > 0 \Rightarrow x_2$ milieu de $\left(\frac{11}{16}, \frac{23}{32}\right)$ " "longueur $\frac{1}{32}$

$x_6 = \frac{45}{64}$ $\quad f(x_6) > 0 \Rightarrow x_2$ milieu de $\left(\frac{11}{16}, \frac{45}{64}\right)$ " longueur $\frac{1}{64}$

$x_7 = \frac{89}{128}$ $\quad f(x_7) > 0 \Rightarrow x_8$ milieu de $\left(\frac{11}{16}, \frac{89}{128}\right)$ longueur $\frac{1}{128}$

A ce moment là, comme $\frac{1}{128} < \frac{1}{100}$, on s'arrête avec x_8

$x_8 = \frac{177}{256} \cong \boxed{0.69141}$ $\quad$ ($f(x_8) \cong -0.00348$ proche de zero)



b) Méthode de Newton

ci-contre avec 20 c.s

ci-dessous avec 6 ou 7 c.s

```
0   3
1   2.0995741367357278860
2   1.3445913148420175255
3   0.86588373150750152038
4   0.70724297245204153890
5   0.69324606108946082532
6   0.69314718544846374029
7   0.69314718055994532137
8   0.69314718055994530942
9   0.69314718055994530942
```

$$x_0 = 3$$
$$f(x) = e^x - 2$$
$$f'(x) = e^x$$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

$x_1 = 3 - \frac{e^3 - 2}{e^3}$ $\quad = 2.01996$

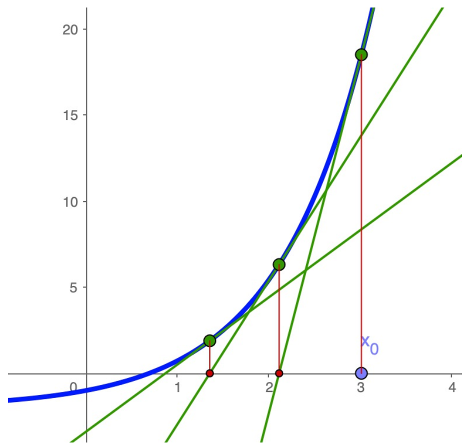
$x_2 = 2.09957 - \frac{e^{2.09957} - 2}{e^{2.09957}}$ $\quad = 1.33459$

$x_3 = 1.33459 - \frac{e^{1.33459} - 2}{e^{1.33459}}$ $\quad = 0.8511$

$x_4 = 0.8511 - \frac{e^{0.8511} - 2}{e^{0.8511}}$ $\quad = 0.7050$

$x_5 = 0.705 - \frac{e^{0.705} - 2}{e^{0.706}}$ $\quad = 0.6932$

$x_5 = 0.693 - \frac{e^{0.693} - 2}{e^{0.693}}$ $\quad = \boxed{0.6931}$



c) Méthode d'Euler $\quad h = 0.25$ $\quad \boxed{x_{n+1} = x_n + h}$ $(x_0 = 1)$ $\quad \boxed{y_{n+1} = y_n + \frac{1}{x_n} h}$ $(y_0 = 0)$

$x_1 = x_0 + h = 1 + \frac{1}{4}$

$y_1 = y_0 + \frac{1}{x_0} h = 0 + \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$x_2 = x_1 + h = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}$

$y_2 = y_1 + \frac{1}{x_1} h = \frac{1}{4} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{20}$

etc...

n	x_n	y_n
0	1	0
1	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{20}$
4	$\frac{7}{4}$	$\frac{37}{60}$
5	2	$\frac{319}{420} \cong \boxed{0.759}$