

PAM : Intérêts & remboursements

Théorie

		Mode opératoire	
		postnumerando	praenumerando
valeur	actuelle	a_n^{\neg}	s_n^{\neg}
	finale	\ddot{a}_n^{\neg}	\ddot{s}_n^{\neg}

$a_n^{\neg} = \frac{1-r^n}{r^n(1-r)}$	$s_n^{\neg} = \frac{1-r^n}{1-r}$
$\ddot{a}_n^{\neg} = \frac{1-r^n}{r^{n-1}(1-r)}$	$\ddot{s}_n^{\neg} = r \frac{1-r^n}{1-r}$

tables CRMP p.10

Application (PAM Hivert 2022)

Le premier janvier 2023, un particulier emprunte 50'000 francs à une banque, le taux d'intérêt annuel est fixé à 3%.

- a) L'emprunteur rembourse sa dette en versant à la fin de chaque mois une mensualité (toujours la même). Déterminer le montant de chaque mensualité pour que la dette soit entièrement remboursée après 36 versements.

L'emprunteur décide de rembourser sa dette par un versement unique. Pour obtenir le montant nécessaire, il envisage les possibilités ci-dessous.

- b) Le premier jour de chaque mois, la première fois le premier janvier 2023, l'emprunteur verse une certaine somme sur un compte créditant des intérêts au taux annuel de 4%. Déterminer la somme à verser chaque mois pour que le capital acquis 3 ans plus tard (à la fin du 36^{ème} mois) permette de rembourser la dette de 50'000 francs (intérêts de la dette y compris).
- c) Le premier janvier 2023, l'emprunteur place 45'000 francs sur un compte créditant des intérêts selon un taux annuel constant. Déterminer ce taux pour que le capital acquis 3 ans plus tard permette de rembourser la dette de 50'000 francs (intérêts de la dette y compris).
- d) Le premier janvier 2023, l'emprunteur place 42'000 francs sur un compte créditant des intérêts au taux annuel de 5%. Déterminer le nombre d'années après lequel le capital acquis par ce placement permet de rembourser la dette de 50'000 francs (intérêts de la dette y compris). Arrondir la réponse au nombre entier le plus proche.

Remarque préliminaire

- o sur a) Soit M la mensualité et S la somme de 50'000

$$\text{Alors ici } \frac{D}{M} = a_n^{\neg} \quad \text{avec } n = 36$$

Justification : A la fin de chaque mois \Rightarrow postnumerando (« à terme echu »)

S=D: Dette initiale (puis réactualisée) \Rightarrow valeur actuelle

- o sur b) Soit M la mensualité et S la somme de 50'000

$$\text{Alors ici } \frac{D}{M} = \ddot{s}_n^{\neg} \quad \text{avec } n = 36$$

Justification : Le premier jour (donc au début) de chaque mois \Rightarrow praennumerando

S=C: Capital acquis 3 ans plus tard \Rightarrow valeur finale

Résolution

a) intérêt mensuel $= \sqrt[12]{1+i} - 1 = \sqrt[12]{1.03} - 1 = 0.00247$

$$\frac{D}{M} = a_{36}^{\neg} \Rightarrow M_r = \frac{D}{\frac{1 - 1.00247^{36}}{1.00247^{36}(1 - .100247)}} = \frac{50'000}{34.4} = 1453.30 \quad (M_r: \text{mensualités de remboursement})$$

b) intérêt mensuel $= \sqrt[12]{1+i} - 1 = \sqrt[12]{1.04} - 1 = 0.00327$

$$\frac{S}{M} = \ddot{s}_{36}^{\neg} \Rightarrow M = \frac{36 \times 1453.30}{\frac{1 - 1.00327^{36}}{(1 - .100327)}} = \frac{52'318.80}{37.6934} = 1388.00 \quad (M: \text{somme à verser par mois})$$

c) $S = 32 \times 1453.30 \quad S_0 = 45'000 \quad S = S_0 r^n \quad n = 3 \quad r = \sqrt[3]{\frac{52'318.80}{45'000}} = 1.0515 \Rightarrow i = 5.15\%$

d) $S = S_0 r^n \Rightarrow n = \log_{0.05} \left(\frac{52'318.80}{42'000} \right) \cong 4.5 \text{ ans}$

*Remarque : le fait de prendre $S=36 \times M_r$, n'est pas évident. Une autre interprétation donne $S = 50'000(1.03)^3 = 54'636$ on obtient $M=1449.5$