12 PAM **Test 4** Jeudi 27 Février 2025

Méthodes de la bissection et de Newton Réponses

Question 1 [7points]

On cherche à décomposer le polynôme $P(x)=105x^3+23x^2-16x-4$ en produit de polynômes du premier degré à coefficients entiers, sachant que $P\left(\frac{2}{5}\right)=0$

On divise donc par $\left(x-\frac{2}{5}\right)$, ici par Horner:

105	23	-16	-4
$\downarrow$	42	26	2
105	65	10	0

$$\begin{aligned} \text{donc } P(x) &= \left(x-\tfrac{2}{5}\right)(105x^2+65x+10)\\ &= \left(x-\tfrac{2}{5}\right)5(21x^2+13x+2)\\ &= (5x-2)21\left(x+\tfrac{1}{3}\right)\left(x+\tfrac{2}{7}\right)\\ &= \boxed{(5x-2)(3x+1)(7x+2)} \end{aligned}$$

Question 2 [12 points]

Le graphe d'une fonction polynomiale du troisième degré

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ passe par les points $P_1(1,0)$ et $P_2(-1,0)$

La pente de la tangente au graphe vaut 2 en P_1, et -10 en P_2.

1) Les 4 conditions (dans l'ordre donné ci-dessus), résument en ce système de 4 équations

$$\begin{cases} a+b+c+d=0\\ -a+b-c+d=0\\ 3a+2b+c=2\\ 3a-2b+c=-10 \end{cases}$$ dont les 4 inconnues sont bien nos coefficients a,b,c,d.

2) & 3) Des deux dernières équations, déduit (par soustraction) que $b=\frac{12}{4}=3$

et donc que $3a+c=2-2b=-4$ (*)

Deux deux premières équations on déduit que $a=-c$ et que $d=-b$

Donc dans (*) : $2a=-4 \quad \Rightarrow a=-2$ et donc $c=2$ enfin $d=-b=-3$

En conclusion : $\boxed{f(x)=-2x^3+3x^2+2x-3}$

4)

On sait (sans même faire de test puisque c'est donné) que $f(x)$ a comme racines 1 et -1, donc est divisible par $(x-1)(x+1)=x^2-1$

On procède ici par division euclidienne.

$$\begin{array}{rr|l} -2x^3+3x^2+2x-3 & & x^2-1 \\ \hline -2x^3 \quad\quad +2x & & -2x+3 \\ 3x^2 \quad\quad -3 & & \\ \hline 0 & & \end{array}$$

Donc $\boxed{f(x)=(x^2-1)(-2x+3)}$

Question 3 [16 points]

$P(x) = 4x^3 - 40x^2 + 37x - 9$

a) Ce polynôme possède au moins un zéro strictement positif.

En effet, le produit des racines $x_1, x_2 \ldots$d'un polynôme $p(x) = a_n x^2 + \cdots + .a_1 x + a_0$ est : $\Pi_{k=1}^{n} x_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$ (pour autant que toutes ces racines existent)

Il s'en suite que, si notre polynôme a trois racines, alors leur produit est *positif.*

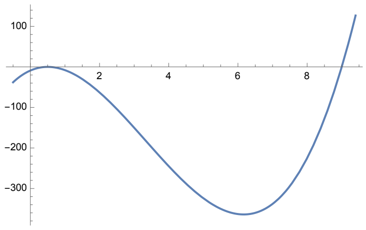
Et pour que le produit de trois nombres réels soit positif, alors au moins l'un des trois doit être positif !

b) On remarque que $p(0) < 0$. On essaye des valeurs de $n \in \mathbb{N}$ telles que $p(0)p(2^n) < 0$

Il faut pour cela que $p(2^n)>0$

n	0	1	2	3	4
$p(2^n)$	-8	-63	-245	-225	6727

On la plus petit valeur est donc $n = 4$



c) Ainsi on commence la méthode de la bissection avec l'intervalle $I_4 = [0, 2^4]$

```
xs ∈ ]0;16[ ≅ ]0.`;16.`[ ⇒ xs ≅ 8.
xs ∈ ]8;16[ ≅ ]8.`;16.`[ ⇒ xs ≅ 12
xs ∈ ]8;12[ ≅ ]8.`;12.`[ ⇒ xs ≅ 10
xs ∈ ]8;10[ ≅ ]8.`;10.`[ ⇒ xs ≅ 9.
```

On a donc trouvé la solution entière $\boxed{x = 9}$

d) En appliquant cette fois l'algorithme de Newton :

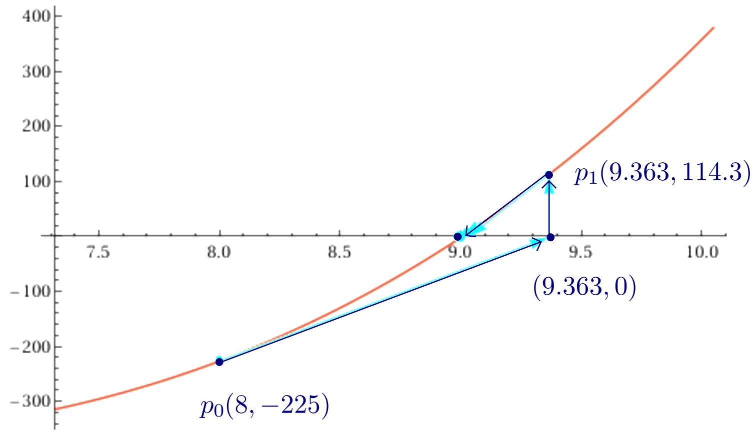
$$x_{n+1} = x_n - \frac{4x_n^3 - 40x_n^2 + 37x_n - 9}{12x_n^2 - 80x_n + 37}$$

$x_0 = 8$

$x_1 = \frac{103}{11} \cong 9.363$

$x_2 = \frac{20953}{2321} \cong 9.028$

$x_3 \cong 9.00018$



c) La connaissance de la racine $x = 9$ permet la *factorisation* du polynôme.

Par Horner

4	-40	37	-9
$\downarrow$	36	-36	9
4	-4	1	0

$P(x) = (x-9)(4x^2 - 4x + 1) = \boxed{4(x-9)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}$