



Question 1

[7points]

Décomposer le polynôme $P(x) = 105x^3 + 23x^2 - 16x - 4$ en produit de polynômes du premier degré à coefficients entiers, sachant que $P(\frac{2}{5}) = 0$

Rep: On divise par $(x - \frac{2}{5})$, ici par Horner:

$$\begin{array}{rrrr} 105 & 23 & -16 & -4 \\ \downarrow & & & \\ 105 & 65 & 10 & 0 \end{array}$$

$$\text{donc } P(x) = (x - \frac{2}{5})(105x^2 + 65x + 10)$$

$$= (x - \frac{2}{5})5(21x^2 + 13x + 2)$$

$$= (5x - 2)21(x + \frac{1}{3})(x + \frac{2}{7})$$

$$= (5x - 2)(3x + 1)(7x + 3)$$

Question 2

[12 points]

Le graphe d'une fonction polynômiale du troisième degré

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ passe par les points $P_1(1, 0)$ et $P_2(-1, 0)$

Au point P_1 la pente de la tangente au graphe vaut 2,

et au point P_2 la pente de la tangente au graphe vaut -10 .

- 1) A partir de ces 4 conditions (dans l'ordre donné ci-dessus), écrivez un système de 4 équations dont les 4 inconnues sont les coefficients a, b, c, d .
- 2) Des deux dernières équations, déduisez les valeurs de a et de c .
- 3) Déterminez les valeurs des deux autres coefficients.
- 4) Écrivez f sous la forme d'un produit de 3 polynômes du premier degré à coefficients entiers, puis esquissez son graphe.

Si la fonction f n'a pas été trouvée, considérez la fonction de rechange

$g(x) = -2x^3 + 5x^2 + 2x - 5$ dont le graphe passe également par les points P_1 et P_2 .

Question 3

[16 points]

On donne le polynôme $P(x) = 4x^3 - 40x^2 + 37x - 9$.

- a) Expliquer pourquoi ce polynôme possède au moins un zéro strictement positif.
- b) On considère la famille d'intervalles $I_n = [0; 2^n]$, où $n \in \mathbb{N}$.
Trouver la plus petite valeur de n pour laquelle $P(0) \cdot P(2^n) < 0$.
- c) Trouver un zéro du polynôme $P(x)$ en appliquant l'algorithme de la bisection. Pour le premier intervalle, prendre celui trouvé à la question précédente.
- d) Trouver une approximation d'un autre zéro du polynôme $P(x)$ en appliquant une fois l'algorithme de Newton et en choisissant $x = 0$ comme valeur initiale.
- e) Écrire $P(x)$ sous forme d'un produit de polynômes du premier degré à coefficients entiers.
Employer cette fois le schéma de Horner.