Mathématiques financières

(Chapitre 2 du programme PAM)

Question 1 (PAM été 2021)

Arrondir toutes les réponses relatives à des sommes d'argent au franc le plus proche.

Le premier janvier 2022, un particulier emprunte 100'000 francs à une banque, le taux d'intérêt annuel est fixé à 4%.

a) L'emprunteur rembourse sa dette en versant à la fin de chaque année une annuité de 25'000 francs. Établir le tableau d'amortissement de l'emprunt en précisant la dette subsistant après chaque versement. Donner également le montant du dernier versement, de moins de 25'000 francs et effectué une année après l'avant-dernier.

b) Déterminer le taux d'intérêt mensuel équivalent à un taux annuel de 4%.
Si ce taux n'a pas pu être déterminé, prendre pour la suite du problème un taux mensuel égal à 0.345%.

c) L'emprunteur rembourse sa dette en versant à la fin de chaque mois une mensualité de 2'000 francs. Déterminer le nombre de mensualités et calculer le montant du dernier versement, de moins de 2'000 francs et effectué un mois après l'avant-dernier.

d) Une autre banque propose un crédit de 100'000 francs remboursable en 48 mensualités de 2'200 francs, à verser à la fin de chaque mois. Déterminer par un calcul si cette autre banque offre un taux d'intérêt plus avantageux que la première.

Question 2 (PAM été 2024)

a) Le premier janvier de chaque année, la première fois le premier janvier 2024, Amélie verse 2000 francs sur un compte dont le taux d'intérêt annuel est de 2%. Le premier janvier 2028, le taux d'intérêt annuel passe à 3%. Amélie effectue dès cette date des versements annuels de 3000 francs. Quel est le capital total dont Amélie disposera le 31 décembre 2030 ?

b) Le premier janvier, Brigitte a emprunté 100'000 francs à une banque. Elle rembourse son emprunt en versant à la fin de chaque année une annuité de 35'000 francs. Une fois qu'elle aura effectué 3 versements, son emprunt sera complètement remboursé. Déterminer une approximation du taux d'intérêt annuel de cet emprunt.

Indication :
Montrer d'abord qu'en posant $r = 1 + t$, où t est le taux cherché, r est une solution de l'équation $20r^4 - 27r^3 + 7 = 0$. Calculer ensuite une approximation de r en utilisant une fois la formule de Newton avec la valeur initiale $r = 1.03$.

Quelques éléments de réponse et de discussion

(a)

étape	Date	Dettes	Intérêts	Remboursements	Annuités
0	01,2022	100'000			
1	12,2022	79'000.	4000.	21'000.	25'000
2	12,2023	57'160.	3160.	21'840.	25'000
3	12,2024	34'446.4	2286.4	22'713.60	25'000
4	12,2025	10'824.3	1377.86	23'622.10	25'000
5		0	432.97	10'824.30	11'257.30

tableau 1

Avant de continuer, faisons quelques observations :

1) Les dettes *diminuent* à chaque remboursement
2) Les intérêts étant proportionnels aux dettes *diminuent* également
en effet $I_k = i D_{k-1}$
3) Comme $A_k = R_k + I_k$, il s'en suit que si A_k est consant, $(A_k = A)$ alors R_k *augmente*.

4) Dans notre exemple, le choix de A=25000 n'était pas optimal, car la dette n'a pu être remboursée avec un multiple de A. (à la fin il a fallu verser 10'824.30 frs pour combler la dette).

5) Le tableau 2 ci-dessous permet de comprendre ces relations de façons générale:

étape	Année	Dettes	Intérêts	Remboursements	Annuités
0	01,2022	$D_0 = C$			
1	12,2022	$D_1 = D_0 - R_1$	I_1	$R_1 = A - I_1$	A
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	A
k	12,2024	$D_k = D_{k-1} - R_k$	I_k	$R_k = A - I_k$	A
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	A
n		$D_n = D_{n-1} - R_n$	I_n	$R_n = A - I_n$	A

tableau 2

6) Il doit exister une valeur de A telle que $D_n=0$, avec $n=4$. Par ce qui précède on peut déjà deviner que cette valeur doit être légèrement supérieure à 25000.

Pour trouver cette valeur, commençons par établir une expression récursive pour D_k (dette à l'étape k)

$$\begin{aligned} D_k &= D_{k-1} - R_k \\ &= D_{k-1} - (A - I_k) \\ &= D_{k-1} + I_k - A \\ &= D_{k-1} + i D_{k-1} - A \\ &= D_{k-1}(1+i) - A \\ &= \boxed{D_{k-1} r - A} \quad (\text{avec } r = 1+i) \end{aligned}$$

Il en découle de cette relation que :

$D_1 = Cr - A$

$D_2 = D_1 r - A = (Cr - A)r - A = Cr^2 - Ar - A$

$D_3 = D_3 r - A = (Cr^2 - Ar - A)r - A = Cr^3 - Ar^2 - Ar - A$

$$D_n = D_{n-1} r - A = \ldots = Cr^n - A \sum_{k=0}^{n-1} r^k = \boxed{Cr^n - A\frac{1-r^n}{1-r}} \circledast$$

Donc si l'on veut qu'après n remboursements, la dette D_n soit *nulle*, alors

$$Cr^n - A\frac{1-r^n}{1-r} = 0 \iff Cr^n = A\frac{1-r^n}{1-r} \iff A = C\,\frac{r^n(1-r)}{1-r^n} = \boxed{\frac{C}{a_{n]}}}$$

En posant $\boxed{a_{n]} = \frac{1-r^n}{r^n(1-r)}}$ « valeur actuelle d'une rente-unité payable n fois » (Table CRM p.10)

La réponse à notre question est : $A = \frac{C}{a_{4]}}$ avec C=100'000 et $a_{4]} = \frac{1-(1.04)^4}{(1.04)^4(-0.04)} = 3.629$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{A=27'549 frs}}$

Le tableau ci-dessous montre ce qui se passe en choisissant A=27'549 fr

étape	Année	Dettes	Intérêts	Amortissements	Annuités
0	01,2022	100'000			
1	12,2022	76'451.	4000.	23549.	27'549.
2	12,2023	51'960.	3058.04	24491.	27'549.
3	12,2024	26'489.4	2078.4	25470.6	27'549.
4	12,2025	0.000028	1059.58	26489.4	27'549.
5					

tableau 3

On voit que, comme on le souhaitait, la dette disparait maintenant complètement après 4 périodes.

7) Il est possible de déterminer le nombre d'étapes nécéssaire pour rembourser la dette (connaissant C, i et A constant).

Pour cela il suffit de remarquer que $a_{n]}$ est non seulement égal à $\frac{1-r^n}{r^n(1-r)}$ mais aussi à $\frac{C}{A}$

Autrement dit $\frac{C}{A} = \frac{1-r^n}{r^n(1-r)}$ d'où $\frac{C}{A}(1-r)r^n = 1-r^n \quad \Rightarrow r^n\left(\frac{C}{A}(1-r)+1\right)-1=0$

$\Rightarrow r^n = \frac{1}{1+\frac{C}{A}-r} \quad \Rightarrow n = \log_r\left(\frac{1}{\frac{C}{A}(1-r)+1}\right) = \log_r\left(\frac{1}{1-\frac{C}{A}i}\right)$

Essayons cette formule dans la situation des tableaux 1 et 3

Tableau 1 : C=100'000 i=4% A=25'000 $\Rightarrow n = \log_{1.04}\left(\frac{1}{1-4\cdot 0.04}\right) = 4.446$

Tableau 2 : C=100'000 i=4% A=27'549 $\Rightarrow n = \log_{1.04}\left(\frac{1}{1-0.145196}\right) = 4.000000$

Ces résultas correspondent bien aux situations décrites précédemment.

Suite de la résolution du problème 1:

(b) La relation entre i: taux d'intérêt annuel et m: taux d'intérêt annuel donnant le même intérêt après une année est : $1+i = (1+m)^{12} \quad \Rightarrow m = 0.327374\%$

(c) Afin de déterminer le nombre de mensualités de 2000 frs pour rembourser C=100'000 frs avec un taux d'intérêt $m = 0.327\%$, on utilise ma méthode du point 7 ci-dessus.

$$n = \log_r\left(\frac{1}{1-\frac{C}{A}m}\right) = \frac{-\ln\left(1-\frac{C}{A}m\right)}{\ln(r)} = \frac{-\ln(1-50\times 0.00327)}{\ln(1,00327)} = 54,685$$

il faut donc $\boxed{\text{55 mensualités}}$, puisque 54 ne suffisent pas

(de même qu'il faut 5 annuités dans le cas du tableau 1 puisque 4 ne suffisent pas)

Le montant de la dernière dette est donné par la formule ⊛ en bas de la page 2, à savoir

$D_n = C r^n - A\frac{1-r^n}{1-r}$ donc $D_{54} = 10^5\,(1.00327374)^{54} - 2000\frac{1-(1.00327374)^{54}}{1-1.00327374} = \boxed{1378.58 \text{ frs}}$

Le tableau 4 (page suivante) confirme ces derniers résultat:

−Il y a 54 mensualité régulières

−la dernière dette est alors de 1378.58 frs

Par contre le dernier remboursement n'est pas égal à cette dette résiduelle, puisqu'il faut lui ajouter l'intérêt d'environ 11frs. C'est intérêt se calcul facilement par le formule $I_k = i\,D_{k-1}$, ce qui donne $I_{54} = 0.00327374 \times D_{53}$ avec $D_{53} = C r^{53} - A\frac{1-r^{53}}{1-1.00327374} = 3367.56$

ce qui donne en effet $I_{54} = 11.0245$, et donc un versement final de $D_{54}+I_{54} = \boxed{1389.60}$ francs.

étape	Mois	Dette	Intérêt	Amortissement	Mensualités
0	jan.2022	100000	0.	2000.	2000
1	fév.2022	98327.4	327.374	1672.63	2000
2	mars2022	96649.3	321.898	1678.1	2000
3	avr.2022	94965.7	316.405	1683.6	2000
4	mai 2022	93276.6	310.893	1689.11	2000
5	juin 2022	91581.9	305.363	1694.64	2000
6	juil.2022	89881.7	299.815	1700.18	2000
7	aout 2022	88176.	294.249	1705.75	2000
8	sept.2022	86464.7	288.665	1711.33	2000
9	oct.2022	84747.7	283.063	1716.94	2000
10	nov.2022	83025.2	277.442	1722.56	2000
11	déc.2022	81297.	271.803	1728.2	2000
12	jan.2023	79563.1	266.145	1733.85	2000
13	fév.2023	77823.6	260.469	1739.53	2000
14	mars2023	76078.4	254.774	1745.23	2000
15	avr.2023	74327.4	249.061	1750.94	2000
16	mai 2023	72570.7	243.329	1756.67	2000
17	juin 2023	70808.3	237.578	1762.42	2000
18	juil.2023	69040.1	231.808	1768.19	2000
19	aout 2023	67266.2	226.019	1773.98	2000
20	sept.2023	65486.4	220.212	1779.79	2000
21	oct.2023	63700.8	214.385	1785.61	2000
22	nov.2023	61909.3	208.54	1791.46	2000
23	déc.2023	60112.	202.675	1797.33	2000
24	jan.2024	58308.8	196.791	1803.21	2000
25	fév.2024	56499.6	190.888	1809.11	2000
26	mars2024	54684.6	184.965	1815.03	2000
27	avr.2024	52863.6	179.023	1820.98	2000
28	mai 2024	51036.7	173.062	1826.94	2000
29	juin 2024	49203.8	167.081	1832.92	2000
30	juil.2024	47364.9	161.08	1838.92	2000
31	aout 2024	45519.9	155.06	1844.94	2000
32	sept.2024	43668.9	149.02	1850.98	2000
33	oct.2024	41811.9	142.961	1857.04	2000
34	nov.2024	39948.8	136.881	1863.12	2000
35	déc.2024	38079.6	130.782	1869.22	2000
36	jan.2025	36204.2	124.663	1875.34	2000
37	fév.2025	34322.7	118.523	1881.48	2000
38	mars2025	32435.1	112.364	1887.64	2000
39	avr.2025	30541.3	106.184	1893.82	2000
40	mai 2025	28641.3	99.9843	1900.02	2000
41	juin 2025	26735.	93.7641	1906.24	2000
42	juil.2025	24822.6	87.5236	1912.48	2000
43	aout 2025	22903.8	81.2626	1918.74	2000
44	sept.2025	20978.8	74.9812	1925.02	2000
45	oct.2025	19047.5	68.6792	1931.32	2000
46	nov.2025	17109.8	62.3565	1937.64	2000
47	déc.2025	15165.9	56.0132	1943.99	2000
48	jan.2026	13215.5	49.6491	1950.35	2000
49	fév.2026	11258.8	43.2641	1956.74	2000
50	mars2026	9295.63	36.8583	1963.14	2000
51	avr.2026	7326.06	30.4315	1969.57	2000
52	mai 2026	5350.05	23.9836	1976.02	2000
53	juin 2026	3367.56	17.5147	1982.49	2000
54	juil.2026	1378.58	11.0245	1378.58	$\boxed{1389.60}$
55	aout 2026	0	-		

(d) Nous avons à présent A=2200 avec $n=48$ et toujours C=100000.

On cherche m, en suposant $D_{48}=0$

Essayons d'utiliser une fois encore la relation ⊛ : $D_n = C r^n - A\frac{1-r^n}{1-r}$

$C r^n - A\frac{1-r^n}{1-r} = 0 \quad \Rightarrow C r^n(1-r) = A(1-r^n) \Rightarrow C r^{n+1} - (C+A)\, r^n + A = 0$

$\Rightarrow 100'000\, r^{49} - (102'200)\, r^{48} + 2200 = 0$ équation non résoluble analytiquement.

$\Rightarrow 1000\, r^{49} - (1022)\, r^{48} + 22 = 0$

La seule solution réelle positive supérieure à 1 est $r = 1.00225$

d'où $m = 0.00225$ i.e 0.225% , ce qui est *inférieur* à 0.327374%, donc *moins* avantageux(?)

Le problème est que cette méthode nécessite un calcul numérique, qui n'est pas évident même avec les méthodes numériques du programme de PAM.

Il serait alors préférable de recourir à une méthode comparative pour répondre plus facilement à cette question.

Quelques indications pour résoudre la question 2

A]

Avec un tableau (valeurs arrondies)

année	i	début	fin
2024	2%	2000	2040
25	2%	4040	4121
26	2%	6121	6243
27	2%	8243	8408
28	3%	11408	11750
29	3%	14750	15193
2030	3%	18193	18734

Avec des formules

première étape ($n=4, i=0.02, A=2000$

$\ddot{s}_{n]} = r\frac{r^n-1}{r-1} = 1.02\frac{1.02^4-1}{0.02} = 2.0404$

$\ddot{s}_{n]} \times A = 2.0404 \times 2000 = 8408.1$ frs

deuxième étape (n=3, i=0.03,A=3000)

$\ddot{s}_{n]} = r\frac{r^n-1}{r-1} = 1.03\frac{1.03^3-1}{0.03} = 3.1836$

$\ddot{s}_{n]} \times A = 3.1836 \times 3000 = 9550.88$ frs

A cela s'ajoute l'intérêt composé des 8408.1 frs

c'est à dire $I = 8408 \times (1.03)^3$

ce qui donne finalement $\boxed{18738.45}$ frs

B]

☼ Par une démarche similaire à celle de l'observation 7 (page3), vous pouvez trouver un polynôme du 4^{em} degré dont r est solution.

☼ Ce polynome doit être précisément celui proposé dans l'énoncé (indication)

☼ Utiliser comme demandé la méthode de Newton.

Sauf erreur $r = 1.0248$ (mais 0.26 en est déjà une honnête approximation).