
Exercice 1

Résoudre les équations différentielles (E.D) suivantes

1) $y' = (x+1)y^2$ $\boxed{y = \frac{2}{c-(x+1)^2}}$

2) $y' = \frac{2(x+1)}{y}$ $\boxed{y = \pm\sqrt{2(x+1)^2 + c}}$

3) $y' = \frac{e^x}{3y}$ $\boxed{y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}e^x + c}}$

4) $e^{x+y} = y'e^{2x-y}$ $\boxed{y = -\frac{1}{2}\ln(|2e^{-x} + c|)}$

5) $y = \ln(y')$ $\boxed{y = -\ln(|c-x|)}$

6) $x = \ln(y')$ $\boxed{y = e^x + c}$

7) $x + y = \ln(y')$ $\boxed{y = -\ln(|e^x + c|)}$

8) $\frac{2y}{y'} = 3\sec(x)$ $\boxed{y = ce^{\frac{2\sin(x)}{3}}}$

Remarque : A une différence près de la constante c

des formulations *équivalentes* des même solutions peuvent être proposées,

comme $\boxed{y = \frac{2}{c-x^2+2x}}$ pour (1) ou $\boxed{y = \pm\sqrt{2x^2+4x+c}}$ pour (2)

Exercice 2

1) si c$\geqslant$0 : Dom $= \mathbb{R}\setminus\{\pm\sqrt{c} - 1\}$ si c$<$0 Dom $= \mathbb{R}$

2) si c$\geqslant$0 : Dom $= \mathbb{R}$ si c$<$0 Dom $= \left]-\infty; -\sqrt{\frac{-c}{2}} - 1\right] \cup \left[\sqrt{\frac{-c}{2}} - 1; \infty;\right[$

3) si c$\geqslant$0 : Dom $= \mathbb{R}$ si c$<$0 Dom $= [\ln(-c) - 1; \infty;[$

4) si c$\geqslant$0: Dom $= \mathbb{R}$ si c$<$0 Dom $= \mathbb{R}\setminus\left\{-\ln\left(\frac{-c}{2}\right)\right\}$

Remarque : Si l'on se contentait de la solution sans les valeurs absolues, le domaine serait

restreint à : si c$\geqslant$0 : Dom $= \mathbb{R}$ si c$<$0 Dom $= \left]-\infty; -\ln\left(\frac{-c}{2}\right)\right[$

5) Dom $= \mathbb{R}\setminus\{c\}$ sans l'extension : Dom $=]-\infty; c[$

6) Dom $= \mathbb{R}$ $(\forall c \in \mathbb{R})$

7) si c$\geqslant$0 : Dom $= \mathbb{R}$ si c$<$0 Dom $= \mathbb{R}\setminus\{\ln(-c)\}$

(sans l'extension : si c$\geqslant$0 : Dom $= \mathbb{R}$ si c$<$0 Dom $=]\ln(-c); \infty;[$)

8) Dom $= \mathbb{R}$ $(\forall c \in \mathbb{R})$

Exercice 3

Reprenons encore les 5 EDs précédentes.

1) Est-il possible de trouver une solution à la première E.D satisfaisant l'une des trois *conditions "initiales"* suivantes ? (si oui laquelle ? sinon pourquoi ?)

i) $y'(1)=0$ non **ii)** $y'(0)=1$ $c=-1$ ou $c=3$ **iii)** $y'(0)=-1$ non

2) Trouver une solution à la seconde ED, telle que $y(3)=-6$ $c=\frac{10}{3}$

3) Trouver une solution à la troisième ED, telle que $y(0)=1$ $c=\frac{-5}{9}$

4) Est-il possible de trouver une solution de la quatrième ED telle que $y=f(x)$ avec $f(\ln(2))=-\ln(3)$? oui : Par exemple $y=-\frac{1}{2}\ln(2e^{-x}+8)$

5) Sachant que la fonction $g(x)$ est solution de la cinquième ED, et que $g(0)=1$, quel est alors le signe de $g(\frac{1}{\pi})$?

$g(\frac{1}{\pi})=-\ln(\frac{1}{e}-\frac{1}{\pi})=-\ln(\frac{\pi-e}{e\pi})$ or $0<\frac{\pi-e}{e\pi}<1$ donc $\ln(\frac{\pi-e}{e\pi})<0$ donc $g(\frac{1}{\pi})>0$

(remarque : la réponse valeur décimale approchée est 3.0044)