12 PAM **Test 1b** Vendredi 2 oct. 2026

/30 *Équations différentielles 1* Réponses

---

**Question 1** [ /23 points]

Dans cette question, nous allons considérer l'équation différentielle suivante:

$$(x+2)^2(y'-y)=y$$

**1)** Est-elle *linéaire* ? oui [ /1]

**2)** Si oui est elle *homogène* ? oui [ /1]

**3)** Peut-on la réécrire sous la forme $y'=F(x,y)$ ? oui [ /2]

$F(x,y)=\frac{(x+2)^2+1}{(x+2)^2}y$

**4)** Peut-on aussi la réécrire sous la forme $u(x)dx+v(y)dy=0$ ? [ /3]

oui par exemple avec $u(x)=\frac{(x+2)^2+1}{(x+2)^2}$ et $v(y)=-\frac{1}{y}$

Est-elle donc bien à *variables séparable*.

**5)** Résolution : $\int\frac{(x+2)^2+1}{(x+2)^2}dx=\int\frac{1}{y}dy+c$ [ /8]

$$\Leftrightarrow \quad \int 1+\frac{1}{(x+2)^2}dx=\int\frac{1}{y}dy+c$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln|y|=x-\frac{1}{x+2}+c$$

la solution générale est donc $\boxed{y=k\frac{e^x}{e^{\frac{1}{x+2}}}}$

**6)** Vérification

$$y'=k\left(\frac{e^x}{e^{\frac{1}{x+2}}}\right)'=k\left(e^{x-\frac{1}{x+2}}\right)'=k\left(e^{x-\frac{1}{x+2}}\right)\left(1+\frac{1}{(x+2)^2}\right) \qquad [\ /3]$$

$$=k\frac{(x+2)^2+1}{(x+2)^2}e^{x-\frac{1}{x+2}}=\frac{(x+2)^2+1}{(x+2)^2}\left(ke^{x-\frac{1}{x+2}}\right)=\frac{(x+2)^2+1}{(x+2)^2}y$$

donc $(x+2)^2y'=(x+2)^2y+y \quad \Rightarrow (x+2)^2(y'-y)=y$

**7)** Domaine : $\boxed{D_y=\mathbb{R}\backslash\{-2\}}$ [ /1]

**8)** Solution particulière [ /4]

$$y(0)=\sqrt{e} \Leftrightarrow k\left(\frac{e^0}{\frac{1}{e^{0+2}}}\right)=\sqrt{e} \Leftrightarrow k\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=\sqrt{e} \Leftrightarrow k=e$$

$$\text{donc } \boxed{y_p(x)=e\,\frac{e^x}{\frac{1}{e^{x+2}}}=\frac{e^{x+1}}{\frac{1}{e^{x+2}}}}$$

$$\text{et} \qquad y_p'(x)=\frac{(x+2)^2+1}{(x+2)^2}\cdot y_p(x)=\frac{(x+2)^2+1}{(x+2)^2}\cdot\frac{e^{x+1}}{\frac{1}{e^{x+2}}}$$

$$\text{Avec } x=-1 \quad : y_p'(-1)=\frac{(1)^2+1}{(1)^2}\cdot\frac{e^{-1+1}}{\frac{1}{e^{-1+2}}}=\boxed{\frac{2}{e}}$$

## Question 2 [ /10 points]

**1)** Résoudre l'équation différentielle [ /8]

$$3\sin(x)y'=6\cos(x)y$$

$$\Leftrightarrow \int\frac{1}{y}dy=\int\frac{6\cos(x)}{3\sin(x)}dx+c$$

$$\Leftrightarrow \ln|y|=2\ln|\sin(y)|+c$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y=k\sin^2(x)}$$

**2)** Vérification [ /2]

$$y'=k\,(\sin^2(x))'=k\,2\sin(x)\cos(x) \Rightarrow 3\sin(x)y'=3k\,2\sin^2(x)\cos(x)=6\cos(x)y$$

**3)** Trouver une *solution particulière* telle que $y(\frac{3\pi}{2})=-2$

$$-2=k\sin^2\left(\tfrac{3\pi}{2}\right)=k(-1)^2 \Rightarrow \boxed{k=-2}$$ [ /2]

**Bonus** [+2]

En déduire la valeur exacte de $y(\frac{\pi}{4})$

$$y=-2\sin^2\left(\tfrac{\pi}{4}\right)=-2\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=-1$$