12 PAM **Test 1** Vendredi 25 sept.2026

/30 *Équations différentielles 1* Réponses

Question 1 [/22 points]

Dans cette question, nous allons considérer l'équation différentielle suivante:

$$(x-1)y' = (x+1)y$$

1) Cette ED est du premier son *ordre* ? [/1]

2) Elle est *linéaire* ? [/1]

3) Elle est *homogène* ? [/1]

4) On peut l'écrire sous la forme $y' = F(x,y)$? [/2]

avec $\boxed{F(x,y) = \frac{x+1}{x-1}y}$

5) On peut aussi la réécrire sous la forme $u(x)dx + v(y)dy = 0$? [/2]

par exemple avec $\boxed{u(y) = -\frac{1}{y}}$ et $\boxed{v(x) = \frac{x+1}{x-1}}$

6) Aide à la résolution (compléter l'identité) [/1]

$\frac{x+a}{x+b} = \frac{x+b+(a-b)}{x+b} = 1 + \frac{a-b}{x+b}$

7) Résolution [/7]

$$(x-1)\frac{dy}{dx} = (x+1)y \quad \Leftrightarrow \int \frac{1}{y}dy = \int \frac{x+1}{x-1}dx + c$$

$$\text{Or} \quad \int \frac{x+1}{x-1}dx = \int \frac{x-1+2}{x-1}dx = \int \frac{x-1}{x-1}dx + \int \frac{2}{x-1}dx = x + 2\ln(x-1)$$

Donc $\ln(y) = x + 2\ln(x-1) + c$

$\Rightarrow y = e^c e^x e^{2\ln(x-1)} = \boxed{Ce^x(x-1)^2}$

8) On montre que cette solution vérifie bien l'équation, car [/3]

$y(x)' = C\,[e^x(x-1)^2 + 2e^x(x-1)] = C\,e^x(x-1)(x+1)$

et donc $(x-1)y' = C\,e^x(x-1)^2(x+1) = (x+1)y$

9) $y(2) = e^3 \Leftrightarrow Ce^2(2-1)^2 = e^3$ donc $C = e$ et $y = e^{x+1}(x-1)^2$ [/4]

dans ce cas, par (ii) on a alos $y(x)' = (x+1)y(x)$

et donc $y'(2) = (2+1)e^3 = \boxed{3e^3}$

Bonus :

B_1) L'équation différentielle à la question (4) est sous la *Forme standard*

L'équation différentielle à la question (5) est sous la *Forme différentielle*

[+2]

Question 2 [/8 points]

Résoudre l'équation différentielle [/8]

$$y' = (x+1)y^3$$

$$\Rightarrow \int y^{-3}dy = \int (x+1)dx + c$$

$$\Rightarrow \frac{y^{-2}}{-2} = \frac{(x+1)^2}{2} + c$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{y^2} = (x+1)^2 + c$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \pm\sqrt{\frac{-1}{(x+1)^2 + c}}}$$

Bonus :

B_2) Trouver une *solution particulière* à cette dernière équation différentielle telle que $y(0) = -2$ [+2]

La condition $y(0) = \pm\sqrt{\frac{-1}{(0+1)^2+c}} = -2$ nous contraint à choisit le signe $-$ à gauche.

Donc $\sqrt{\frac{-1}{1+c}} = 2 \Rightarrow \frac{-1}{1+c} = 4 \Rightarrow -1 = 4 + 4c \Rightarrow \boxed{c = \frac{-5}{4}}$

B3) Etudier le *domaine de définition* de $f(x)=\sqrt{\frac{-1}{(x+1)^2+C}}$ en distinguant si nécessaire les cas où la constante d'intégration C est positive ou négative. [+4]

première condition (imposée par la racine carée) : $\frac{-1}{(x+1)^2+c} \geqslant 0$

seconde condition (imposée par le dénominateur) : $(x+1)^2+c \neq 0$

De la première condition, on déduit que c<0 (autrement dit : $c=-|c|$)

De la seconde: $(x+1)^2-|c| \neq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 \neq |c| \Leftrightarrow (x+1) \neq \pm\sqrt{|c|} \Leftrightarrow x \neq -1 \pm \sqrt{|c|}$

Le signe de $\frac{-1}{(x+1)^2+c}$ est positif si $-|c| < (x+1) < |c|$

Conclusion : $D_f =]-1-\sqrt{|c|}\ , -1+\sqrt{|c|}[\ = \ \boxed{]-1-\sqrt{-c}\ , -1+\sqrt{-c}[}$