Réponse à l'exercice

$$3\sin(x)y' = 6\cos(x)y + 3\tan^4(x)$$

$$\sin(x)y' - 2\cos(x)y = \tan^4(x)$$

Solution homogène : $y_h(x) = c\sin^2(x)$ [identique à l'exemple précédent]

Ansatz : $y_{nh}(x) = c(x)\sin^2(x)$

donc $y'_{nh}(x) = 2c(x)\sin(x)\cos(x) + c'(x)\sin^2(x)$

On remplace :

$$\sin(x)c'\sin^2(x) + c2\sin^2(x)\cos(x) - 2c\sin^2(x)\cos(x) = \tan^4(x)$$

$$\sin(x)c'\sin^2(x) = \tan^4(x)$$

$$c'(x) = \frac{\sin(x)}{\cos^4(x)} \qquad c(x) = \int \frac{\sin(x)}{\cos^4(x)}dx = \frac{1}{3\cos^3(x)}$$

on pose $u = \cos(x)$ donc $du = -\sin(x)dx$

$$\Rightarrow c(x) = c(x) = \int \frac{\sin(x)}{u^4}\frac{du}{-\sin(x)} = -\int \frac{du}{u^4} = \boxed{\frac{1}{3u^3}} \quad (+c)$$

Conclusion : $y_{nh}(x) = \frac{1}{3\cos^3(x)}\sin^2(x) = \frac{\sin^2(x)}{3\cos^3(x)}$

$$\boxed{y_g(x) = \frac{\sin^2(x)}{3\cos^3(x)} + c\sin(x)} \qquad \text{NB:} \quad y_g(x) = y_{nh}(x) + y_h(x)$$

Vérification pour $y_{NH}(x)$

$$\left(\frac{\sin^2(x)}{3\cos^3(x)}\right)' = \frac{6\sin(x)\cos^4(x) + 9\cos^2(x)\sin^3(x)}{9\cos^6(x)} = \frac{2\sin(x)}{3\cos^2(x)} + \frac{\sin^3(x)}{\cos^4(x)}$$

donc $3\sin(x)y' = 2\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + 3\frac{\sin^4(x)}{\cos^4(x)} = 2\tan^2(x) + 3\tan^4(x)$

par ailleurs: $6\cos(x)y + 3\tan^4(x) = 6\cos(x)\frac{\sin^2(x)}{3\cos^3(x)} + 3\tan^4(x)$

$=2an^2(x) + 3\tan^4(x)$ OK !

Remarque : $y_h(x)$ ajouterait simplement zéro au terme de gauche de l'ED.

C'est pourquoi on a toujours $y_g(x) = y_{nh}(x) + y_h(x)$