Équations différentielles non homogènes

Résumé du cours du 9 octobre (juste avant les vacances)

- Nous avons repris l'équation du **test 1b** question 2.

  Il s'agit du test de rattrapage dont l'énoncé se trouve ici

  La question consistait à résoudre l'équation différentielle *homogène* $3\sin(x)y' = 6\cos(x)\,y$

- Nous avons ajouter un terme (en bleu) à cette équation, de façon a obtenir l'équation différentielle *non homogène* suivante : $3\sin(x)y' = 6\cos(x)y + 3\sin^4(x)$

- Nous avons simplifié puis résolu cette équation en se basant sur la méthode dite de la *variation de la constante*. Voici le résumé de chacune de ces étapes:

$$3\sin(x)y' = 6\cos(x)y + 3\sin^4(x)$$
$$\sin(x)y' - 2\cos(x)y = \sin^4(x)$$

Solution homogène : $\boxed{y_h(x) = c\sin^2(x)}$

Vérification : $y_h'(x) = 2c\sin(x)\cos(x) \Rightarrow 2c\sin^2(x)\cos(x) - 2\cos(x)c\sin^2(x) = 0$

Ansatz : $y_{\text{nh}}(x) = c(x)\sin^2(x)$

donc $y_{\text{nh}}'(x) = 2c(x)\sin(x)\cos(x) + c'(x)\sin^2(x)$

On remplace :

$$\sin(x)c'\sin^2(x) + c2\sin^2(x)\cos(x) - 2c\cos(x)\sin^2(x) = \sin^4(x)$$
$$\sin(x)c'\sin^2(x) = \sin^4(x)$$
$$c'(x) = \sin(x) \qquad \Rightarrow c(x) = -\cos(x) \quad (+c)$$

Conclusion : $y_{\text{nh}}(x) = -\cos(x)\sin^2(x)$

$$\boxed{y_g(x) = -\cos(x)\sin^2(x) + c\sin^2(x)}$$

Vérification

$$y_g'(x) = -2\cos^2(x)\sin(x) + \sin^3(x) + c\cos(x)$$

Dans ED : $-2\cos^2(x)\sin^2(x) + \sin^4(x) + 2c\sin(x)\cos(c) + 2\cos^2(x)\sin^2(x) - 2c\sin(x)\cos(x)$

$= \sin^4(x)$ oui!

Exercice (question similaire)

Résoudre : $3\sin(x)y' = 6\cos(x)y + 3\tan^4(x)$

Indice : Utiliser la substitution $u = \cos(x)$ pour intégrer. Réponse : $\boxed{y_g(x) = \frac{\sin^2(x)}{3\cos^3(x)} + c\sin(x)}$

voir RM p.81