



Mixture de petites questions

...../ 16 points

Réponses

Question (a,b,c : été 2012)

- a) Déterminer le plus grand diviseur commun de 1071 et de 1029 en utilisant l'algorithme d'Euclide et en détaillant les calculs.

1071	$1071 = 1029 + 42$	42		42	$42 = 2 \times 12 + 0$	0
1029		1029	$1029 = 24 \times 42 + 21$	21		21

La réponse est : $\text{PGCD}(1071, 1029) = 21$

- b) Résoudre le *système* d'équations ci-dessous en utilisant la méthode de Gauß et en explicitant chaque étape de la démarche

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 7 & (L_1) \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 4 & (L_2) \\ 3x_1 - 3x_2 + 14x_3 = -13 & (L_3) \end{cases}$$

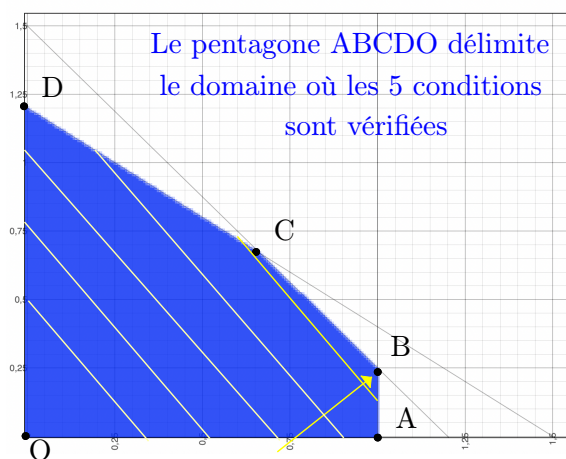
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 7 & (L_1) \\ -5x_2 + 5x_3 = -10 & (L_2 - 2L_1) \longrightarrow (L_2) \\ -15x_2 + 11x_3 = -34 & (L_3 - 3L_1) \longrightarrow (L_3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 7 & (L_1) \\ -5x_2 + 5x_3 = -10 & (L_2) \\ -4x_3 = -4 & (L_3 - 3L_2) \longrightarrow (L_3) \end{cases}$$

$$(L_3) \Rightarrow x_3 = 1, (L_2) \Rightarrow -5x_2 + 5 = -10 \Rightarrow x_2 = 3, (L_1) \Rightarrow x_1 + 12 + 1 = 7 \Rightarrow x_1 = -6$$

c) Maximiser $z = 3x + 2y$ sous les contraintes suivantes

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ 5x + 4y \leq 6 \\ 4x + 5y \leq 6 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$



Le pentagone ABCDO délimite le domaine où les 5 conditions sont vérifiées

z est maximum en B

avec B: $(1; \frac{1}{4})$

donc $z_{\max} = \frac{7}{2}$

d) i) Ré-écrire $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{11}$ sous la forme d'une autre somme de 4 fractions unitaires.

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{11} = \frac{110 + 88 + 55 + 40}{440} = \frac{293}{440}$$

$$\left\lceil \frac{440}{293} \right\rceil = 2 \quad \frac{293}{440} - \frac{1}{2} = \frac{73}{440}$$

$$\left\lceil \frac{440}{73} \right\rceil = 7 \quad \frac{73}{440} - \frac{1}{7} = \frac{71}{3080}$$

$$\left\lceil \frac{3080}{71} \right\rceil = 44 \quad \frac{71}{3080} - \frac{1}{44} = \frac{1}{3080}$$

$$\text{Donc } \frac{293}{440} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{44} + \frac{1}{3080}$$

$$\text{ii) On a donc } \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{11} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{44} + \frac{1}{70}$$

$$\text{d'où : } \frac{1}{11} - \frac{1}{44} - \frac{1}{70} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{280 - 70 - 1}{3080} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{209}{3080} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8}$$