Exercices de révision et variante de la méthode d'Euler

Question 1

i) Trouver la fonction $y(x)$ telle que $y' = \frac{x\,y}{1-x^2} + 2x$, avec $y(2) = 1$

Solution homogène : $\frac{dy'}{y} = \frac{x\,dx}{1-x^2} \Rightarrow \ln(|y|) = -\frac{1}{2}\ln|1-x^2| + \text{c}$

$$\boxed{y_H(x) = C\frac{1}{\sqrt{|1-x^2|}}} \qquad \text{avec } C = \pm\, e^c$$

Remarque : La valeur absolue permet d'étendre le *domaine* à $x \in \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$ plutôt qu'à $x \in]-1,1[$. Cela répond à la très bonne question de Lara.

Pour justifier cette possibilité de recourir à la valeur absolue, il suffit de dériver le résultat ci-dessus, ce qui donne:

$$\frac{\mathrm{d}y_H}{\mathrm{d}x} = C\frac{-1(-2x)\text{sng}(1-x^2)}{2|1-x^2|\sqrt{|1-x^2|}} = C\frac{x\,\text{sng}(1-x^2)}{|1-x^2|\sqrt{|1-x^2|}} = \frac{x\,y}{|1-x^2|}\ \text{sng}(1-x^2)$$

Explication: comme $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 1 \\ -x & \text{si } x < 1 \end{cases}$, la dérivée de $|x|$ est la fonction $\text{sng}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 1 \\ -1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

$$\text{donc}\quad \frac{\mathrm{d}y_H}{\mathrm{d}x} = \begin{cases} \frac{x\,y}{1-x^2}(1) & \text{si } x^2 < 1 \\ \frac{-x\,y}{1-x^2}(-1) & \text{si } x^2 > 1 \end{cases} = \frac{x\,y}{1-x^2} \quad \text{ce qui vérifie bien l'ED homogène } \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$$

Ansatz: $y_{\text{NH}}(x) = C(x)\frac{1}{\sqrt{|1-x^2|}}$

donc $C'(x)\frac{1}{\sqrt{|1-x^2|}} = 2x$

$$C'(x) = 2x\ \frac{1}{\sqrt{|1-x^2|}} \qquad \Rightarrow \quad C(x) = \int 2x\ \sqrt{|1-x^2|}\ dx$$

$$= \begin{cases} -\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} & \text{si } x^2 < 1 \\ \frac{2}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}} & \text{si } x^2 > 1 \end{cases}$$

$$\text{donc : } y_{\text{NH}}(x) = \begin{cases} -\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{2}{3}(1-x^2) = \frac{2}{3}(x^2-1) & \text{si } x^2 < 1 \\ \frac{2}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{2}{3}(x^2-1) & \text{si } x^2 > 1 \end{cases}$$

$$\boxed{y_g(x) = \frac{2}{3}(x^2-1) + \frac{C}{\sqrt{|1-x^2|}}}$$

Si $y(2) = 1$ alors $1 = \frac{2}{3}(3) + \frac{C}{\sqrt{3}} \Rightarrow C = -\sqrt{3} \qquad \cong -1.73$

$$\boxed{y_p(x) = \frac{2}{3}(x^2-1) - \sqrt{\frac{3}{|1-x^2|}}}$$

ii) En déduire la valeur *exacte* de $y(4)$, et sa valeur *approchée* à 5 chiffres significatifs.

$$y_p(4) = \frac{2}{3}(15) - \sqrt{\frac{3}{15}} = 10 - \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \cong \boxed{9.5528}$$

Question 2

En considérant l'équation différentielle de la question 1 (toujours avec avec $y(2)=1$) déterminer $y(4)$ par la méthode d'Euler à deux pas.

n	x_n	y_n	valeur approchée
0	2	1	1.
1	3	$\frac{13}{3}$	4.33333
2	4	$\frac{209}{24}$	8.70833

Question 3

En considérant encore une fois l'équation différentielle qu'au question 1 et 2 déterminer $y(4)$ par la méthode la variante de la méthode d'Euler présentée en classe, en un pas.

n	x_n	y_n	valeur approchée
0	2	1	1.
1	4	$\frac{463}{45}$	10.2889

Comparaison:

Rappelons la valeur trouvée pour $y(4)$: $\quad y(4)=10-\frac{\sqrt{5}}{5} \cong \boxed{9.5528}$

La seconde méthode donne en un seul pas un résultat plus proche que la première en deux pas.

Si l'on applique 6 pas avec chaque méthode, on obtient

n	x_n	y_n
0	2.	1.
1	2.13333	1.44444
2	2.26667	1.89763
3	2.4	2.36347
4	2.53333	2.84459
5	2.66667	3.34279
6	2.8	3.85941
7	2.93333	4.39543
8	3.06667	4.95159
9	3.2	5.52846
10	3.33333	6.12651
11	3.46667	6.7461
12	3.6	7.38753
13	3.73333	8.05104
14	3.86667	8.73684
15	4.	9.44508

écart relatif: 1.13%

n	x_n	y_n
0	2.	1.
1	2.13333	1.44882
2	2.26667	1.908
3	2.4	2.38075
4	2.53333	2.86929
5	2.66667	3.37521
6	2.8	3.8997
7	2.93333	4.44365
8	3.06667	5.00776
9	3.2	5.59256
10	3.33333	6.19849
11	3.46667	6.82591
12	3.6	7.4751
13	3.73333	8.14631
14	3.86667	8.83974
15	4.	9.55555

écart relatif: 0.029%

Illustration

La figure ci-dessous montre le champ vectoriel $\vec{V}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1+F^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ F(x,y) \end{pmatrix}$

avec $F(x,y) = \frac{xy}{1-x^2} + 2x$ (membre de droite de l'équation différentielle)

(Remarque : le facteur $\frac{1}{\sqrt{1+F^2}}$ est là juste pour rendre les vecteurs unitaires).

On y voit arbitrairement 4 courbes de la solutions générale $y_g(x) = \frac{2}{3}(x^2-1) + \frac{C}{\sqrt{|1-x^2|}}$

correspondant aux valeurs de C suivantes: $-6, 0, 2$ (en pointillé) et $-\sqrt{3}$ (en continu).

Cette dernière passe par le point $P_0(2,1)$, ainsi que par point P $(4,\ 10 - \frac{\sqrt{5}}{5})$.

lequel sort malheureusement du cadre (il serait un peut plus à droite, et bien plus haut, à $y \cong 9.55$).