

## Champs vectoriels et de direction

Définition : Un *champ vectoriel* (dans la plan  $\mathbb{R}^2$ ) est une application linéaire  $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  :

$$(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} v_x(x, y) \\ v_y(x, y) \end{pmatrix}$$

qui donc à chaque point  $P(x, y)$  fait correspondre un vecteur  $\vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} v_x(x, y) \\ v_y(x, y) \end{pmatrix}$

Pour la suite nous allons considérer l'exemple le champ vectoriel  $\vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{y} \\ -x \end{pmatrix}$

La figure 1 représente un certain nombre de points  $(x, y)$  tels que  $x \in [-4, 4]$  et  $y \in [-2, \frac{7}{2}]$

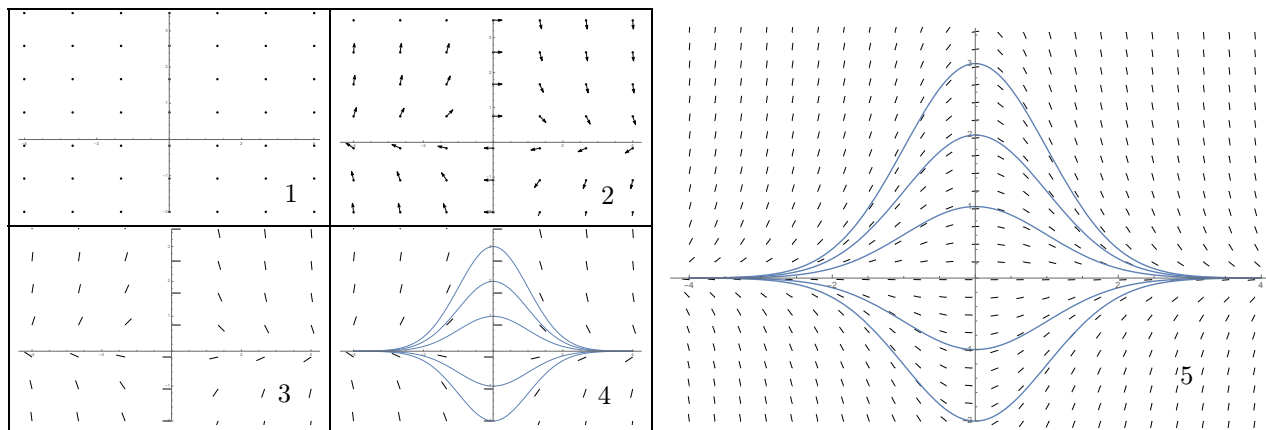
A chacun de ces points on va faire correspondre un *vecteur*.

La figure 2 montre le résultat, avec un *vecteurs* de  $\hat{V}(x, y) = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}(x, y)$  plutôt que de  $\vec{V}(x, y)$  (donc de même direction que  $\vec{V}$  mais de norme 1. La raison de ce choix est que la longueur des vecteurs ne nous intéresse *pas* dans cette étude et qu'il est plus commode de représenter des vecteurs ayant tous la même longueur.)

La figure 3 est la *même* que la figure 2, au détail près que les vecteurs ont été remplacés par des *segments de droite*. La raison est que le sens ne nous intéresse non plus *pas* dans cette étude !

Il ne reste donc plus que la *direction*. C'est pourquoi on parle alors d'un *champ de direction*.

La figure 4 montre cinq *courbes en tout point tangente aux vecteurs du champ vectoriel* et donc aussi *aux segments du champ de direction*.



La figure 5 montre *les mêmes courbes* avec une plus grande *densité de segments* du champ de direction. On peut imaginer qu'à la limite où ces segments deviendraient vraiment très nombreux (et très courts), ils pourraient faire apparaître les courbes elles-mêmes...

Questions : 1) Montrer que  $\begin{pmatrix} v_x(x, y) \\ v_y(x, y) \end{pmatrix}$  est colinéaire à  $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{v_y(x, y)}{v_x(x, y)} \end{pmatrix}$

2) Expliquer : Si une courbe  $y = f(x)$  est *tangente* aux vecteurs, alors  $f'(x) = \frac{v_y(x, y)}{v_x(x, y)}$

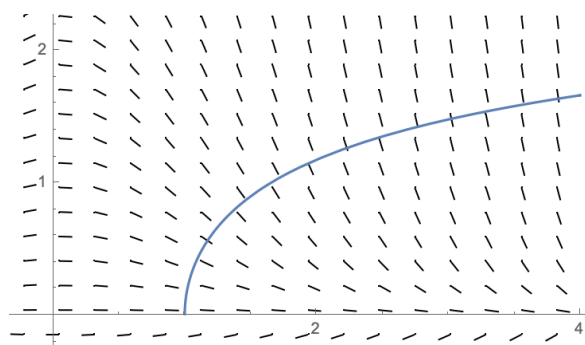
3) Montrer que toutes ces courbes ont comme équation  $y = c e^{-\frac{x^2}{2}}$  (famille de *gaussiennes*).

## Champs de direction et familles orthogonales

Nous avons vu que l'équation différentielle  $f'(x) = \frac{v_y(x, y)}{v_x(x, y)}$  donne comme *solution générale* l'ensemble des *courbes tangentes* à un champ (vectoriel ou simplement *de direction*) donné.

Il est alors facile de montrer que  $f'(x) = -\frac{1}{\frac{v_y(x, y)}{v_x(x, y)}}$  donne l'ensemble des courbes en tout point *perpendiculaires* au même champ (vectoriel ou *de direction*).

Voici un exemple, en considérant encore un fois le champ vectoriel :  $\vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{y} \\ -x \end{pmatrix}$



Monter que ces courbes ont comme équation  $y = \sqrt{2} \sqrt{\ln(cx)}$  ou  $y = -\sqrt{2} \sqrt{\ln(cx)}$  ( $C \in \mathbb{R}$ )

La figure ci-dessous montre (arbitrairement) 24 de ces courbes, superposées à 8 courbes tangentes.

On parle alors de *familles de courbes orthogonales*.

