12 PAM **Complément à la Série 2** Jeudi 9 nov.2025

(Équations différentielles non homogène) Corrigé

Question 1

Resoudre (ED) : $y' - 2y = \dfrac{e^{\frac{3}{2}x} - 8}{2}$

Equation homogène associée : $\frac{dy}{y} = 2dx \Rightarrow y_H = Ce^{2x}$

Ansatz : $y_{\text{NH}} = C(x)\, e^{2x}$

Substit dans ED: $C'(x)\, e^{2x} + C(x)2e^{2x} - 2C(x)\, e^{2x} = \frac{e^{\frac{3}{2}x} - 8}{2}$

$$\text{donc } C'(x)\, e^{2x} = \frac{e^{\frac{3}{2}x} - 8}{2} \quad \Rightarrow C'(x) = \frac{e^{\frac{3}{2}x} - 8}{2e^{2x}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{2} - 4e^{-2x}$$

$$\text{donc } C(x) = \int \left(\frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{2} - 4e^{-2x} \right) dx + c$$

$$= \frac{1}{2} \int e^{-\frac{1}{2}x} dx - 4 \int e^{-2x} dx + c$$

$$= \frac{1}{2} \frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{-\frac{1}{2}} - 4 \frac{e^{-2x}}{(-2)} + c$$

$$= -e^{\frac{1}{2}x} + 2e^{-2x}$$

$$\text{donc par l'Ansatz : } y_{\text{NH}} = \left(-e^{\frac{1}{2}x} + 2e^{-2x} \right) e^{2x}$$

$$= -e^{\frac{3x}{2}} + 2$$

Et la solution générale est : $\boxed{y_{\text{gen}} = y_H + y_{\text{NH}} = Ce^{2x} - e^{\frac{3}{2}x} + 2}$

<u>Vérification</u> : $y'_{\text{gen}} = 2\, Ce^{2x} - \frac{3}{2} e^{\frac{3x}{2}}$

$$\text{et dans ED : } y' - 2y = 2\, Ce^{2x} - \frac{3}{2} e^{\frac{3x}{2}} - 2\, Ce^{2x} + 2e^{\frac{3}{2}x} - 4$$

$$= -\frac{3}{2} e^{\frac{3x}{2}} + 2e^{\frac{3x}{2}} - 4$$

$$= \left(-\frac{3}{2} + 2 \right) e^{\frac{3x}{2}} - 4$$

$$= \frac{1}{2} e^{\frac{3x}{2}} - 4$$

$$= \frac{e^{\frac{3x}{2}} - 8}{2} \quad \text{cqfd}$$

Question 2

On considère l'équation différentielle $\quad (1+x^2)(y'-1)=2xy$

Remarque : Elle peut se mettre sous la forme $y'-\frac{2x}{1+x^2}y=1$

1) La solution de l'équation homogène associée est $y_H=C(1-x^2)$ Pour plus de détails sur les points 1 et 2 voir cet autre site

2) La solution générale est $y_{\text{gen}}=(\arctan(x)+C)(1-x^2)$

3) Pour trouver une solution particulière s telle que $s(\sqrt{3})=-\pi$

on résoud : $(\arctan(\sqrt{3})+C)(1-\sqrt{3}^2)=-\pi$

$$\left(\frac{\pi}{3}+C\right)(1-3)=-\pi \Rightarrow \left(\frac{\pi}{3}+C\right)=\frac{\pi}{2} \Rightarrow C=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\boxed{\frac{\pi}{6}}$$

Question 3

On considère l'équation différentielle $\quad 2xy'=3y+4x^3+1$

1) Sous la forme $a(x)y'+b(x)y=c(x)$ ont voit que le coefficient $a(x)=x$ n'est pas *constant*.

2) i) par la méthode de *variation de la constante*

Equation homogène associée : $2xy'=3y$

$$\frac{2}{3}\ln(y)=\ln(x)+c \quad \Rightarrow y^{\frac{2}{3}}=e^c\,x \quad \Rightarrow y=C\sqrt{x^3}$$

On vérifie : $(C\sqrt{x^3})'=C\frac{3}{2}\sqrt{x}$ et donc $2xy'=3Cx\sqrt{x}=3C\sqrt{x^3}=3y$ OK

Equation non homogène : $y_{\text{NH}}=C(x)\sqrt{x^3} \Rightarrow y'_{\text{NH}}=C'\sqrt{x^3}+C\frac{3}{2}\sqrt{x}$

Dans l'équation différientielle : $2x\left(C'\sqrt{x^3}+C\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)=3\left(C(x)\sqrt{x^3}\right)+4x^3+1$

se simplifie en $2xC'\sqrt{x^3}=4x^3+1$ donc $C'=\frac{4x^3+1}{2x\sqrt{x^3}}=\frac{4x^3+1}{2x^{\frac{5}{2}}}=2\sqrt{x}+\frac{x^{-\frac{5}{2}}}{2}$

$$C=2\int\sqrt{x}\,dx+\frac{1}{2}\int x^{-\frac{5}{2}}dx=\frac{4}{3}\sqrt{x^3}-\frac{1}{3\sqrt{x^3}}$$

donc $y_{\text{NH}}=\left(\frac{4}{3}\sqrt{x^3}-\frac{1}{3\sqrt{x^3}}\right)\sqrt{x^3}=\boxed{\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{3}}$

Vérif : $\left(\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{3}\right)'=4x^2$ donc $2xy'=2x\cdot 4x^2=8x^3$

et $3y+4x^3+1=3\left(\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{3}\right)+4x^3=8x^3-1+1=8x^3$

Conclusion : $\boxed{y_{\text{gen}}=y_H+y_{\text{NH}}=C\sqrt{x^3}+\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{3}}$

ii) Trouvons y_{NH} par une hypothèse sur la solution non homogène

On suppose $y_{\text{NH}} = ax^3 + bx^2 + cx + d$ donc $y'_{\text{NH}} = 3ax^2 + 2bx + c$

et $2x\,y' = 3y + 4x^3 + 1 \Leftrightarrow 2x(3ax^2 + 2bx + c) = 3ax^3 + 3bx^2 + 3cx + 3d + 4x^3 + 1$

$$\Leftrightarrow 6ax^3 + 4bx^2 + 2cx = 3ax^3 + 3bx^2 + 3cx + 3d + 4x^3 + 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6a = 3a + 4 \\ 4b = 3b \\ 2c = 3c \\ 0 = 3d + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = +4 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ 3d = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y_{\text{NH}} = \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{3}}$$

3) On appelle $s(x)$ la solution de l'équation dont le graphe passe par le point P(4; 92).

Montrer que $s(x) = \frac{7}{8}\sqrt{x^3} + \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{3}$

$92 = C\sqrt{4^3} + \frac{4}{3} \times 4^3 - \frac{1}{3} = C\sqrt{64} + \frac{256}{3} - \frac{1}{3}$ $\Rightarrow 8C = 92 - \frac{255}{3} \Rightarrow C = \frac{276 - 255}{3} = \frac{21}{3} = 7 \Rightarrow C = \frac{7}{8}$

donc $s(x) = \frac{7}{8}\sqrt{x^3} + \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{3}$

<u>Vérif</u> : $\left(\frac{7}{8}\sqrt{x^3} + \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{3}\right)' = \frac{7}{8}\frac{1}{2(\sqrt{x^3})}(3x^2) + \frac{4}{3}3x^2 = \frac{21}{16\sqrt{x^3}}x^2 + 4x^2 = \frac{21}{16\sqrt{x}}x + 4x^2$

$2x\,y' = \frac{21x\sqrt{x}}{8} + 8x^3$

et $3y + 4x^3 + 1 = 3\left(\frac{7}{8}\sqrt{x^3} + \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{3}\right) + 4x^3 + 1 = \frac{21}{8}\sqrt{x^3} + 4x^3 - 1 + 4x^3 + 1 = \frac{21}{8}x\sqrt{x} + 8x^3$

De plus on a bien $s(4) = \frac{7}{8}\sqrt{64} + \frac{4}{3}64 - \frac{1}{3} = 7 + \frac{256}{3} - \frac{1}{3} = \frac{21 + 255}{3} = \frac{276}{3} = 92$