

Question 1

Resoudre (ED) : $y' - 2y = \frac{e^{\frac{3}{2}x} - 8}{2}$

Equation homogène associée : $\frac{dy}{y} = 2dx \Rightarrow y_H = Ce^{2x}$

Ansatz : $y_{NH} = C(x)e^{2x}$

Substit dans ED: $C'(x)e^{2x} + C(x)2e^{2x} - 2C(x)e^{2x} = \frac{e^{\frac{3}{2}x} - 8}{2}$

$$\text{donc } C'(x)e^{2x} = \frac{e^{\frac{3}{2}x} - 8}{2} \Rightarrow C'(x) = \frac{e^{\frac{3}{2}x} - 8}{2e^{2x}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{2} - 4e^{-2x}$$

$$\text{donc } C(x) = \int \left(\frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{2} - 4e^{-2x} \right) dx + c$$

$$= \frac{1}{2} \int e^{-\frac{1}{2}x} dx - 4 \int e^{-2x} dx + c$$

$$= \frac{1}{2} \frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{-\frac{1}{2}} - 4 \frac{e^{-2x}}{(-2)} + c$$

$$= -e^{\frac{1}{2}x} + 2e^{-2x}$$

donc par l'Ansatz : $y_{NH} = \left(-e^{\frac{1}{2}x} + 2e^{-2x} \right) e^{2x}$

$$= -e^{\frac{3x}{2}} + 2$$

Et la solution générale est : $y_{\text{gen}} = y_H + y_{NH} = Ce^{2x} - e^{\frac{3}{2}x} + 2$

Vérification : $y'_{\text{gen}} = 2Ce^{2x} - \frac{3}{2}e^{\frac{3x}{2}}$

et dans ED : $y' - 2y = 2Ce^{2x} - \frac{3}{2}e^{\frac{3x}{2}} - 2Ce^{2x} + 2e^{\frac{3x}{2}} - 4$

$$= -\frac{3}{2}e^{\frac{3x}{2}} + 2e^{\frac{3x}{2}} - 4$$

$$= \left(-\frac{3}{2} + 2 \right) e^{\frac{3x}{2}} - 4$$

$$= \frac{1}{2}e^{\frac{3x}{2}} - 4$$

$$= \frac{e^{\frac{3x}{2}} - 8}{2} \quad \text{cqfd}$$

Question 2

On considère l'équation différentielle

$$(1+x^2)(y'-1)=2xy$$

Remarque : Elle peut se mettre sous la forme $y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 1$

1) La solution de l'équation homogène associée est $y_H = C(1-x^2)$ [Pour plus de détails](#)

2) La solution générale est $y_{\text{gen}} = (\arctan(x) + C)(1-x^2)$

[sur les points 1 et 2](#)

[voir cet autre site](#)

3) Pour trouver une solution particulière s telle que $s(\sqrt{3}) = -\pi$

on résoud : $(\arctan(\sqrt{3}) + C)(1 - \sqrt{3}^2) = -\pi$

$$\left(\frac{\pi}{3} + C\right)(1-3) = -\pi \Rightarrow \left(\frac{\pi}{3} + C\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow C = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \boxed{\frac{\pi}{6}}$$