Équations différentielles 1

Exercice 1

Résoudre les équations différentielles (E.D) suivantes

1) $y' = (x+1)y^2$ $\boxed{y = \frac{2}{c-(x+1)^2}}$

2) $y' = \frac{2(x+1)}{y}$ $\boxed{y = \pm\sqrt{2(x+1)^2 + c}}$

3) $y' = \frac{e^x}{2y}$ $\boxed{y = \pm\sqrt{e^x + c}}$

4) $e^{x+y} = y' e^{2x-y}$ $\boxed{y = -\frac{1}{2}\ln(2e^{-x} + c)}$

5) $\frac{2y}{y'} = 3\sec(x)$ $\boxed{y = c e^{\frac{2\sin(x)}{3}}}$

6) $y = \ln(y')$ $\boxed{y = -\ln(c - x)}$

7) $x = \ln(y')$ $\boxed{y = e^x + c}$

8) $x + y = \ln(y')$ $\boxed{y = -\ln(e^x + c)}$

9) $xy = xy' - y$ $\boxed{y = c x e^x}$

10) $xy = xy' - (xe^x + y)$ $\boxed{y = c x e^x + \ln(x)\, x e^x}$

Remarque : A une différence près de la constante c

des formulations *équivalentes* des même solutions peuvent être proposées,

comme $\boxed{y = \frac{2}{c - x^2 + 2x}}$ pour (1) ou $\boxed{y = \pm\sqrt{2x^2 + 4x + c}}$ pour (2)

Exercice 2

1) si c⩾0 : $\mathrm{Dom} = \mathbb{R}\backslash\{\pm\sqrt{c} - 1\}$ si c<0 $\mathrm{Dom} = \mathbb{R}$

2) si c⩾0 : $\mathrm{Dom} = \mathbb{R}$ si c<0 $\mathrm{Dom} = \left]-\infty; -\sqrt{\frac{-c}{2}} - 1\right] \cup \left[\sqrt{\frac{-c}{2}} - 1; \infty;\right[$

3) si c⩾0 : $\mathrm{Dom} = \mathbb{R}$ si c<0 $\mathrm{Dom} = [\ln(-c) - 1; \infty; [$

4) si c⩾0 : $\mathrm{Dom} = \mathbb{R}$ si c<0 $\mathrm{Dom} = \left]-\infty; -\ln(\frac{-c}{2})\right[$

5) $\mathrm{Dom} = \mathbb{R}$

6) $\mathrm{Dom} =]-\infty; c[$

7) $\mathrm{Dom} = \mathbb{R}$ $(\forall c \in \mathbb{R})$

8) si c⩾0 : $\mathrm{Dom} = \mathbb{R}$ si c<0 $\mathrm{Dom} =]\ln(-c); \infty; [$

9) $\mathrm{Dom} = \mathbb{R}$ $(\forall c \in \mathbb{R})$

10) $\mathrm{Dom} = \mathbb{R}^{+*}$ $(\forall c \in \mathbb{R})$

Exercice 3

Reprenons encore les 5 ED précédentes.

1) Est-il possible de trouver une solution à la première E.D satisfaisant l'une des trois *conditions "initiales"* suivantes ? (si oui laquelle ? sinon pourquoi ?)

i) $y'(1)=0$ $\boxed{\text{non}}$ **ii)** $y'(0)=1$ $\boxed{c=-1 \text{ ou } c=3}$ **iii)** $y'(0)=-1$ $\boxed{\text{non}}$

2) Trouver une solution à la seconde ED, telle que $y(3)=-6$ $\boxed{c=\frac{10}{3}}$

3) Trouver une solution à la troisième ED, telle que $y(0)=1$ $\boxed{c=\frac{-5}{9}}$

4) Est-il possible de trouver une solution de la quatrième ED telle que $y=f(x)$ avec $f(\ln(2))=-\ln(3)$? $\boxed{\text{oui : cette solution est } y=-\frac{1}{2}\ln(2e^{-x}+8)}$

5) Sachant que la fonction $g(x)$ est solution de la cinquième ED, et que g(0)=1, quel est alors le signe de $\mathrm{g}(\frac{1}{\pi})$?

$\mathrm{g}(\frac{1}{\pi})=-\ln(\frac{1}{e}-\frac{1}{\pi})=-\ln(\frac{\pi-e}{e\pi})$ or $0<\frac{\pi-e}{e\pi}<1$ donc $\ln(\frac{\pi-e}{e\pi})<0$ donc $\boxed{\mathrm{g}(\frac{1}{\pi})>0}$

(remarque : la réponse valeur décimale approchée est 3.0044)

Exercice 4

1) Rappeler ce que sont les formes *standard*, *différentielle* et *canonique* d'une équation différentielle du 1er ordre.

Forme *standard* : $y'=F(x,y)$

Forme *différentielle* : $U(x,y)dx+V(x,y)dy=0$

Forme *canonique* : $A(x,y)y+B(x,y)y'=R(x)$

2) Si possible, mettre chacune des 8 EDs ci-dessus sous ces formes.

3) Ces EDs sont-elles à *variables séparables* ? $\boxed{\text{oui}}$

de forme *differentielle* : $u(x)dx+v(y)dy=0$ ou de forme *standatd* $y'=f(x)g(x)$

4) Sont-elles toutes *linéaires* ?

de forme *canonique* : $a(x)y+b(x)y'=r(x)$ $\boxed{\text{non, excepté la } 6^{\text{eme}}}$ (et trivialement la 8^{eme})

5) Sont-elles toutes à *coefficient constant* ? $\boxed{\text{non}}$, ici aucune ne l'est !

6) Sont-elles toutes *homogène* ? $\boxed{\text{non}}$, car la dernière ne l'est pas.