

Principe de l'assurance vie

Dans ce document nous allons voir comment interpréter une *table de mortalité* telle que celle donnée à la question 5 de l'examen été 2013, et comment prendre en compte ces données pour déterminer la prime unique que le client doit payer à l'assureur dans un contrat d'assurance vie.

Nous aurons à traiter des tableau comme celui-ci de la figure ci-contre.

Age x	Nombre de survivant à l'âge x l_x	Probabilité de survie à l'âge x p_x	Probabilité de décès à l'âge x q_x	Espérance moyenne de vie à l'âge x e_x
0	100 000	0.994 662	0.005 338	77.22
1	99 466	0.999 597	0.000 403	76.63
2	99 426	0.999 688	0.000 312	75.66
...
54	93 311	0.994 853	0.005 147	26.14
55	92 831	0.994 343	0.005 657	25.28
56	92 305	0.993 782	0.006 218	24.42
57	91 731	0.993 167	0.006 833	23.57
58	91 105	0.992 491	0.007 509	22.73
59	90 421	0.991 747	0.008 253	21.89
60	89 674	0.990 929	0.009 071	21.07
61	88 861	0.990 029	0.009 971	20.26
62	87 975	0.989 037	0.010 963	19.46
...
106	13	0.486 256	0.513 744	1.20
107	6	0.431 982	0.568 018	0.93
108	3	0.000 000	1.000 000	0.50

RemarqueUn tableau similaire se trouve dans les tables \mathcal{RN} pp 117-118.

Un peu de théorie pour commencer

• Définitions :

(1) *L'espérance moyenne de vie à l'âge x* est le nombre d'années qu'une personne d' âge x peut s'attendre à vivre en moyenne, si elle est soumise aux conditions de mortalité par âge observées au cours d'une année donnée.

(2) *La probabilité de survie à l'âge x* est la probabilité qu'un individu atteigne ou dépasse cet âge.
autrement dit : $p_x = P(\text{vivant}(x + 1)|\text{vivant}(x))$ ¹

(3) *La probabilité de décès à l'âge x* est la probabilité de l'événement contraire de la survie à l'âge x,
On a donc $\forall x : p_x = 1 - q_x$

• Quelle est la **probabilité d'être en vie à l'âge x + n** sachant que l'on est en vie à l'âge x ?

Par définition : $p_x = P(\text{vivant}(x + 1)|\text{vivant}(x)) = \frac{P(\text{vivant}(x + 1) \cap \text{vivant}(x))}{P(\text{vivant}(x))} = \frac{P(\text{vivant}(x + 1))}{P(\text{vivant}(x))}$

Donc $p_x \times p_{x+1} = \frac{P(\text{vivant}(x + 1))}{P(\text{vivant}(x))} \times \frac{P(\text{vivant}(x + 2))}{P(\text{vivant}(x + 1))} = \frac{P(\text{vivant}(x + 2))}{P(\text{vivant}(x))} = P(\text{vivant}(x + 2)|\text{vivant}(x))$

Donc $p_x \times p_{x+1} \times p_{x+2} = \frac{P(\text{vivant}(x + 1))}{P(\text{vivant}(x))} \times \frac{P(\text{vivant}(x + 2))}{P(\text{vivant}(x + 1))} \times \frac{P(\text{vivant}(x + 3))}{P(\text{vivant}(x + 2))} = \frac{P(\text{vivant}(x + 3))}{P(\text{vivant}(x))}$

etc ... \Rightarrow $P(\text{vivant}(x + n)|\text{vivant}(x)) = \frac{P(\text{vivant}(x + n))}{P(\text{vivant}(x))} = p_x \times p_{x+1} \times \dots \times p_{x+n-1} = \prod_{j=1}^n p_{x+j-1}$ (1)

Par ailleurs on a $P(\text{vivant}(x)) = \frac{I_x}{I_0}$ et donc $\frac{P(\text{vivant}(y))}{P(\text{vivant}(x))} = \frac{\frac{I_y}{I_0}}{\frac{I_x}{I_0}} = \frac{I_y}{I_x}$

Par conséquent, $P(\text{vivant}(x + n)|\text{vivant}(x)) = \frac{P(\text{vivant}(x + n))}{P(\text{vivant}(x))} = \frac{I_{x+n}}{I_x}$ (2)

On dispose donc de *deux* formules [(1) & (2)] pour répondre à cette question.

1. Il s'agit donc d'une probabilité *conditionnelle*. On a $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ \mathcal{RN} p.103

2. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ \mathcal{RN} p.103

Appliquons cette théorie à la première partie de la question 5 (été 2013)

Age des h x	Nombre de survivant à l'âge x l_x	Probabilité de survie à l'âge x p_x	Probabilité de décès à l'âge x q_x	Espérance moyenne de vie à l'âge x e_x
0	100 000	0,994 662	0,005 338	77,22
1	99 466	0,999 597	0,000 403	76,63
2	99 426	0,999 688	0,000 312	75,66
...
54	93 311	0,994 853	0,005 147	26,14
55	92 831	0,994 343	0,005 657	25,28
56	92 305	0,993 782	0,006 218	24,42
57	91 731	0,993 167	0,006 833	23,57
58	91 105	0,992 491	0,007 509	22,73
59	90 421	0,991 747	0,008 253	21,89
60	89 674	0,990 929	0,009 071	21,07
61	88 861	0,990 029	0,009 971	20,26
62	87 975	0,989 037	0,010 963	19,46
...
106	13	0,486 256	0,513 744	1,20
107	6	0,431 982	0,568 018	0,93
108	3	0,000 000	1,000 000	0,50

a) Quelle probabilité un homme de 55 ans a-t-il d'être *encore en vie* à 56 ans ? à 60 ans ?

à 56 ans : Par la définition de p_x , c'est simplement $p_{55} = 0.994343$

Par la formule (2), c'est $\frac{I_{55+1}}{I_{55}} = \frac{92305}{92831} = 0.994343337\dots$

à 60 ans : Par la formule (1), $\prod_{j=1}^n p_{x+j-1}$

(produit des valeurs des cellules colorées de la troisième colonne du tableau) = 0.96599994

Par la formule (2) c'est $\frac{I_{55+5}}{I_{55}}$ (quotient des deux nombres marqués dans la seconde colonne)
= 0.96599196

Théorie

- Calcul de la prime (supposée unique et payée l'année x) que l'assuré doit payer pour couvrir les frais de versement en cas de décès sur n années.

– Si l'intérêt est nul:

Le gain moyen de l'assureur est: $\text{montant de la prime} \times P(\text{prime}) - \text{montant du versement} \times P(\text{versement})$
avec $P(\text{prime}) = 1$ puisqu'il est *certain* que l'assuré paye sa prime, et $P(\text{versement}) = P(\text{décès})$.

En supposant que la prime ne couvre que le risque de décès, dans un cas parfaitement équitable (gain moyen nul), on doit donc avoir :

$$m: \text{montant de la prime} = \text{versement} \times P(\text{décès lors d'une des } n \text{ années depuis } x).$$

○ Pour $n = 1$ (un an) , $P(\text{décès}) = (1 - p_x)$ et donc $m = v(1 - p_x) = m = vq_x$

○ Pour $n > 1$: utiliser la formule de la page 3, avec $i = 0$.

Exemple

- b) Une personne née le 1^{er} janvier, souhaite contracter le jour de son anniversaire de 55 ans une assurance vie, de sorte qu'en cas de décès pendant l'année en cours, son épouse touchera de l'assurance la somme de 100'000.-, le 1er janvier de l'année suivante.

S'il ne décède pas dans l'année, la prime versée à l'assurance est perdue.

Sans tenir compte de l'intérêt de l'argent, donc en considérant un taux d'intérêt de 0%, calculer le montant de la prime unique que l'assureur doit faire payer à ce client, si la prime ne doit couvrir que le risque de décès. (« prime pure »)

Réponse : $m = vq_{55} = 100'000 \times 0.005657 = 565.70$ CHF

– Si l'intérêt n'est pas nul:

- o Pour $n = 1$ (un an), il suffit de diviser la prime pure par $r = 1 + i$

ce qui donne $m_{(i)} = v \frac{q_x}{1+i}$ (dans ce cas où $i = 0$ on retrouve la prime pure)

Exemple

- c) Répondre à la question du point b, mais en considérant un taux d'intérêt de 1.5%.

Réponse : $m = \frac{565.70}{1+0.015} = 557.34$ CHF

- o Pour $n > 1$, l'intérêt se compose de façons plus subtile avec les années consécutives.

$$\text{Cela donne : } m = v \frac{q_x}{1+i} + v \frac{P(\text{vivant}(x+2)|\text{vivant}(x)) \times q_{x+1}}{(1+i)^2} + v \frac{P(\text{vivant}(x+3)|\text{vivant}(x)) \times q_{x+2}}{(1+i)^3} + \dots + v \frac{P(\text{vivant}(x+n)|\text{vivant}(x)) \times q_{x+n-1}}{(1+i)^n}$$

En substituant à $P(\text{vivant}(x+k)|\text{vivant}(x))$ le produit de la formule (1)

on obtient :

$$m = v \times \sum_{k=1}^n \frac{\left(\prod_{j=1}^{k-1} p_{x+j-1} \right) q_{k+x-1}}{(1+i)^k}$$

Exemple

- d) Même question qu'au point c, mais la prime unique payée par le client le jour de ses 55 ans doit couvrir une assurance pour une durée de 5 ans. En cas de décès entre 55 et 60 ans, l'épouse touchera de l'assurance la somme de 100'000, 5 ans après le versement de la prime.

Réponse

$$\begin{aligned} m &= 100'000 \left(\frac{q_{55}}{r} + \frac{p_{55} q_{56}}{r^2} + \frac{p_{55} p_{56} q_{57}}{r^3} + \frac{p_{55} p_{56} p_{57} q_{58}}{r^4} + \frac{p_{55} p_{56} p_{57} p_{58} q_{59}}{r^5} \right) \\ &= 10^5 \left(\frac{0.005657}{1.015} + \frac{0.994343 \times 0.006218}{1.015^2} + \frac{0.994343 \times 0.993782 \times 0.006833}{1.015^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{0.994343 \times 0.993782 \times 0.993167 \times 0.007509}{1.015^4} + \frac{0.994343 \times 0.993782 \times 0.993167 \times 0.992491 \times 0.008253}{1.015^5} \right) \\ &\cong 557.34 + 600.14 + 645.71 + 694.33 + 746.20 = 3243.70 \text{ CHF} \end{aligned}$$

Bonus: Quel devrait-être le taux d'intérêt pour que les contributions à la prime de chacune des cinq années soient approximativement égales (à 518.50CH)? Réponse : $i = 9.18\%$