12 PAM **Test 6** Jeudi 28 Mai 2026

Régression Linéaire & Assurances vie

……./ 45 points Réponses

Question 1

1) En vous basant sur la *table de mortalité de la population suisse* (Tables) [4]

compléter le tableau suivant

âge x	q_x : Probabilité de décès des *femmes* à l'âge x
50	0.002058
55	0.003213
65	0.007187
70	0.011566

2) On cherche à déterminer la probabilité de décès des *femmes* à l'âge de 60 ans. [2]

Pour cela nous allons faire l'hypothèse suivante:

Il existe une relation de proportionnalité entre x et le logarithme des la probabilité de décès.

Justification : la probabilité suit une loi exponentielle décroissante par analogie avec le model la décroissance des isotopes radioactifs $N(t) = N_o e^{-\lambda t}$. En prenant le logarithme on a

$y = \ln(N_o e^{-\lambda t}) = m\,t + h \qquad m = -\lambda, \quad h = \ln(N_o)$

3) [4]

i	âge x_i	y_i
1	50	-6.18602
2	55	-5.74055
3	65	-4.93548
4	70	-4.45969

4) L'équation de la droite de régression qui minimise la somme des carrés des écarts verticaux aux quatre points (x_i, y_i) est $\boxed{y(x) = 0.08515x - 10.4397}$ [10]

5) Un critère adéquat pour la validité de l'hypothèse introduite au point **(2)** est le *coefficient de corrélation* : $\boxed{r = \frac{\text{Cov}}{\sqrt{V_x \cdot V_y}} = 0.999564}$ qui ici est très *proche* de 1 [3]

6) i) Pour une femme de 60 ans: $\boxed{y(60) = 0.00484197}$. Il s'agit d'une *interpolation*. [2,3,1]

ii) On en déduit, que pour une femme de la population suisse,

$\boxed{q(60) \cong e^{y(60)} = 0.00484197}$ donc la probabilité de survie est $\boxed{p_{60} = 1 - q_{60} = 0.995158}$

iii) La table donne $p(60) = 0.995225$.

L'erreur *relative* absolue de notre estimation de $p(60)$ est 0.006% (ce qui est excellent).

7) En se basant sur les Tables ®M, estimer la probabilité pour une femme de 50 ans d'être encore en vie à: [1,2]

i) 51 ans $\boxed{p_{50} = 0.997942 \quad \text{soit} \quad 99.7942\%}$

ii) 55 ans $p_{50}\, p_{51}\, p_{52}\, p_{53}\, p_{54} = 0.997942 \times 0.997739 \times 0.997521 \times 0.997289 \times 0.997044 = 0.987597$

autre méthode : $\frac{l_{55}}{l_{50}} = \frac{95978}{97184} = 0.987591$ donc environ $\boxed{98.7595\%}$

8) Une femme née le 1er janvier souhaite contracter le jour de son anniversaire de ses 50 ans une assurance vie, de sorte qu'en cas de décès pendant l'année en cours, sa famille touchera de l'assurance la somme de 100'000 CHF, le 1er janvier de l'*année suivante*.

Si elle ne décède pas dans l'année, la prime versée à l'assurance est perdue.

En considérant un taux d'intérêt *nul*, calculer le montant de la prime unique que l'assureur doit faire payer à cette cliente afin de couvrir que le risque de décès. (« prime *pure* ») [3]

$m_p = v q_{50} = 100'000 \times 0.002058 = \boxed{205.80 \text{ CHF}}$

9) Répondre à la même question qu'en **(8)**, mais en considérant un taux d'intérêt de 2%. [3]

$m = \frac{m_p}{r} = \frac{205.80}{1+0.02} = \boxed{201.76 \text{ CHF}}$

10) Même question qu'en **(9)** mais la prime unique payée par la cliente le jour de ses 50 ans doit maintenant couvrir une assurance *pour une durée de 5 ans*.

En cas de décès entre 50 et 55 ans, la famille toucherait de l'assurance la somme de 100'000 CHF , 5 ans après le versement de la prime.

$m = \mathrm{v}\left(\frac{q_{50}}{r} + \frac{p_{50}\, q_{51}}{r^2} + \frac{p_{50}\, p_{51}\, q_{52}}{r^3} + \frac{p_{50}\, p_{51}\, p_{52}\, q_{53}}{r^4} + \frac{p_{50}\, p_{51}\, p_{52}\, p_{53}\, q_{54}}{r^5}\right)$ [7]

$$= 100'000\left(\frac{0.002058}{1.02} + \frac{0.997942 \times 0.002261}{1.02^2} + \frac{0.997942 \times 0.997739 \times 0.002479}{1.02^3} + \frac{0.997942 \times 0.997739 \times 0.997521 \times 0.002711}{1.02^4} + \frac{0.997942 \times 0.997739 \times 0.997521 \times 0.997289 \times 0.002956}{1.02^5}\right)$$

$= \boxed{1165.18 \text{ CHF}}$