12 PAM **Test 3** Jeudi 27 Novembre 2025

Éq.diff, champ de directions, et méthode d'Euler

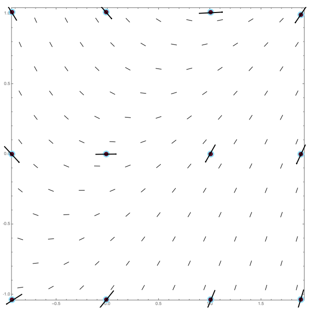
......./ 20 points RÉPONSES

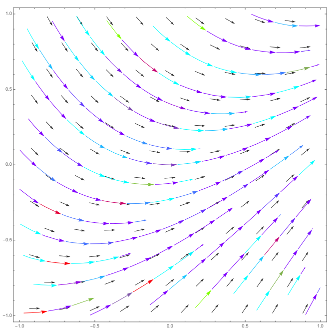
On donne l'équation différentielle $y' = x - y$

a) La première figure montre les direction du champs en $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ avec $-1 \leqslant x \leqslant 2$ et $-1 \leqslant y \leqslant 1$.

La seconde des vecteurs du champ (avec une plus grande densité) ainsi que quelques lignes.

(vous pouvez zoomer sur ces figures)





b) On va résoudre l'équation différentielle $y' = x - y$

On commence son équation homogène associée : $\frac{dy}{dx} = -y \quad \Rightarrow y_{_H} = Ce^{-x}$

<u>Ansatz</u>: $y_{\text{NH}} = C(x)\,e^{-x} \Rightarrow -Ce^{-x} + C\,'e^{-x} = x - Ce^{x} \Rightarrow C\,'e^{-x} = x \Rightarrow C\,(x) = \int x e^{x} dx = (x-1)e^{x}$

Donc $y_{\text{NH}} = (x-1)e^{x}e^{-x} = x - 1$

et $y_{\text{gen}} = y_{_H} + y_{\text{NH}} = Ce^{-x} + x - 1$

Passe par (0,1) $\Leftrightarrow Ce^{-0} + 0 - 1 = 1 \Leftrightarrow C = 2$

$\Rightarrow \boxed{y_{\text{part}} = 2e^{-x} + x - 1}$

[Vérif : $y'_{\text{part}} = -2e^{-x} + 1 = -2e^{-x} - x + 1 + x = -y_{\text{part}} + x$ ok!]

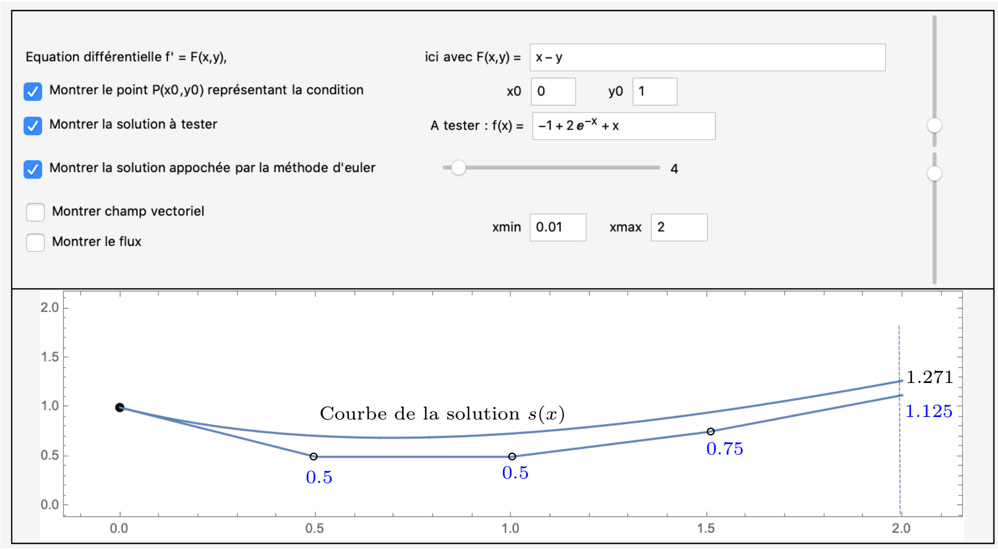
Donc en nommant $s(x)$ cette solution particulière, on a : s(2)=$2e^{-2} + 2 - 1 = \boxed{\frac{2}{e^2} + 1 \cong 1.271}$

c) Pour trouver une approximation de $s(2)$ en utilisant la méthode d'Euler à pas $h = \frac{1}{2}$,

en partant de $x_0 = 0$, on doit effectuer 4 étapes.

$x_0 = 0$	$x_1 = 0.5$	$x_2 = 1$
$f(x_0) = 1$	$f(x_1) = 1 + (0-1) \times 0.5 = \frac{1}{2} = 0.5$	$f(x_2) = 0.5 + (0.5 - 0.5) \times 0.5 = \frac{1}{2} = 0.5$

$x_3 = 1,5$	$x_4 = 2$
$f(x_3) = 0.5 + (1 - 0.5) \times 0.5 = \frac{3}{4} = 0.75$	$f(x_4) = 0.75 + (1.5 - 0.75) \times 0.5 = \frac{9}{4} = 1.125$



La figure ci-dessus montre la courbe solution et son approximation par la méthode d'Euler en 4 pas.

d) Approximation avec la variante d'Euler (telle que décrite dans l'énoncé)

$P_1 = (x_1, y_1) = (0, 1)$ en considérant que $h = 1$

$\bar{P}_2 = (x_1, \bar{y}_2) = (x_1 + h, y_1 + f'(x_1, y_1)h)$ $= (0+1, 1 + (x_1 - y_1)1) = 1 - 1 = (1, 0)$

$P_2 = (x_2, y_2) = \left(x_1 + h, y_1 + \frac{f'(x_1, y_1) + f'(x_2, \bar{y}_2)}{2}h\right)$ $= \left(0+1, 1 + \frac{-1+1}{2}h\right) = (1, 1)$

$\bar{P}_3 = (x_3, \bar{y}_3) = (x_2 + h, y_2 + f'(x_2, y_2)h)$ $= (1+1, 1 + (1-1)1) = (2, 1)$

$P_3 = (x_3, y_3) = \left(x_2 + h, y_2 + \frac{f'(x_2, y_2) + f'(x_3, \bar{y}_3)}{2}h\right)$ $= \left(1+1, 1 + \frac{0+1}{2}h\right) = \boxed{\left(2, \frac{3}{2}\right)}$

$\bar{P}_4 = (x_4, \bar{y}_4) = (x_3 + h, y_3 + f'(x_3, y_3)h)$ $= \left(2+1, \frac{3}{2} + \left(2 - \frac{3}{2}\right)1\right) = (3, 2)$

$P_4 = (x_4, y_4) = \left(x_3 + h, y_3 + \frac{f'(x_3, y_3) + f'(x_4, \bar{y}_4)}{2}h\right)$ $= \left(2+1, \frac{3}{2} + \frac{\frac{1}{2}+1}{2}h\right) = \left(3, \frac{9}{4}\right)$

Remarques :

- On alterne les calculs des $\bar{P}_n$ (coordonnées des points successifs par la méthode d'Euler standard) et de P_n (ici : coordonnées des points successifs par la méthode d'Euler accélérée proposée).
- Les abscisses (x_n) sont les mêmes pour $\bar{P}_n$ et pour P_n $(x_n = x_{n-1} + h = x_0 + nh)$
- Les $\bar{P}_n$ servent ici à calculer les pentes moyennes $\frac{f'(x_{n-1}, y_{n-1}) + f'(x_n, \overline{y_n})}{2}$
- $\bar{P}_4$ et pour P_4 ne sont *pas* demandés, la réponse à la question (3) est donnée par P_3 : $\boxed{s(2) \cong 1.5}$

- On peut condenser l'écritures de ces étapes dans un tableau comme celui-ci:

	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$	$\boxed{x_3 = 2}$	$x_4 = 3$
$\bar{y}$	$\bar{y}_1 = 1$	$\bar{y}_2 = 0$	$\bar{y}_3 = 1$	$\bar{y}_4 = 2$
pente	$0 - 1 = -1$ $\downarrow$	$1 - 0 = 1$ $\downarrow$	$2 - 1 = 1$ $\downarrow$	$3 - 2 = 1$ $\downarrow$
pente *moyenne*	-1 $\nearrow$	0 $\nearrow$	$\frac{1}{2}$ $\nearrow$	$\frac{3}{4}$
y	$y_1 = \bar{y}_1 = 1$	$y_2 = 1$	$\boxed{y_3 = \frac{3}{2}}$	$y_4 = \frac{9}{4}$