

Question 1

On donne l'équation différentielle $2xy' = 3y + 4x^3$ et on appelle $s(x)$ la solution de l'équation dont le graphe passe par le point $P(4; 92)$.

1) Trouver la *solution générale* de l'équation différentielle.

Equation *homogène* associée : $2xy' = 3y$

$$\frac{2}{3}\ln(y) = \ln(x) + c \Rightarrow y^{\frac{2}{3}} = e^c x \Rightarrow y = C\sqrt{x^3}$$

On vérifie : $(C\sqrt{x^3})' = C\frac{3}{2}\sqrt{x}$ et donc $2xy' = 3Cx\sqrt{x} = 3C\sqrt{x^3} = 3y$ OK

Equation *non homogène* : $y_{\text{NH}} = C(x)\sqrt{x^3} \Rightarrow y'_{\text{NH}} = C'\sqrt{x^3} + C\frac{3}{2}\sqrt{x}$

Dans l'équation différentielle : $2x\left(C'\sqrt{x^3} + C\frac{3}{2}\sqrt{x}\right) = 3\left(C(x)\sqrt{x^3}\right) + 4x^3$

se simplifie en $2xC'\sqrt{x^3} = 4x^3$ donc $C' = \frac{4x^3}{2x\sqrt{x^3}} = \frac{2x^3}{x^2\sqrt{x}} = \frac{2x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$

$$C = 2\int \sqrt{x} dx = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{x^3}$$

donc $y_{\text{NH}} = \left(\frac{4}{3}\sqrt{x^3}\right)\sqrt{x^3} = \frac{4}{3}x^3$

Vérif : $\left(\frac{4}{3}x^3\right)' = 4x^2$ donc $2xy' = 2x \cdot 4x^2 = 8x^3$

$$\text{et } 3y + 4x^3 = 3\left(\frac{4}{3}x^3\right) + 4x^3 = 8x^3$$

Conclusion : $y_{\text{gen}} = y_H + y_{\text{NH}} = C\sqrt{x^3} + \frac{4}{3}x^3$

2) Montrer que $s(x) = \frac{5}{6}\sqrt{x^3} + \frac{4}{3}x^3$ $P(4; 92)$

$$92 = C\sqrt{4^3} + \frac{4}{3} \times 4^3 = C\sqrt{64} + \frac{256}{3} \Rightarrow 8C = 92 - \frac{256}{3} \Rightarrow C = \frac{276 - 256}{3} = \frac{20}{3} \Rightarrow C = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}$$

$$\text{donc } s(x) = \frac{5}{6}\sqrt{x^3} + \frac{4}{3}x^3$$

$$\text{Vérif : } \left(\frac{5}{6}\sqrt{x^3} + \frac{4}{3}x^3\right)' = \frac{5}{6} \frac{1}{2(\sqrt{x^3})} (3x^2) + \frac{4}{3}3x^2 = \frac{15}{12\sqrt{x^3}}x^2 + 4x^2 = \frac{5}{4\sqrt{x}}x + 4x^2 = \frac{5\sqrt{x}}{4} + 4x^2$$

$$2xy' = \frac{5x\sqrt{x}}{2} + 8x^3 \quad \text{et } 3y + 4x^3 = 3\left(\frac{5}{6}\sqrt{x^3} + \frac{4}{3}x^3\right) + 4x^3 = \frac{15}{6}\sqrt{x^3} + 4x^3 + 4x^3 = \frac{5}{2}x\sqrt{x} + 8x^3$$

$$\text{De plus on a bien } s(4) = \frac{5}{6}\sqrt{64} + \frac{4}{3}64 = \frac{5 \times 8}{6} + \frac{256}{3} = \frac{5 \times 4 + 256}{3} = \frac{276}{3} = 92$$

Question 2

Trouver la solution générale de l'équation différentielle $y' = e^x y + e^{e^x}$

Equation *homogène* associée : $y' = e^x y$

$$\ln(y) = e^x + c \Rightarrow y_H = C e^{e^x}$$

On vérifie : $(C e^{e^x})' = C e^{e^x} e^x = e^x y$ OK

Equation *non homogène* : $y_{NH} = C(x) e^{e^x} \Rightarrow y'_{NH} = C' e^{e^x} + C e^{e^x} e^x$

Dans l'équation différentielle : $C' e^{e^x} + C e^{e^x} e^x = e^x (C e^{e^x}) + e^{e^x}$

se simplifie en $C' e^{e^x} = e^{e^x}$ donc $C' = 1 \Rightarrow C(x) = x \quad (+C)$

$$\text{donc } y_{NH} = x e^{e^x} \quad \text{et} \quad \boxed{y_{\text{gen}} = x e^{e^x} + C e^{e^x}} \quad (= y_{NH} + y_H)$$

Vérification

$$y'_{\text{gen}} = (x e^{e^x} + C e^{e^x})' = e^{e^x} + x e^{e^x} e^x + C e^{e^x} e^x = e^x (x e^{e^x} + C e^{e^x}) + e^{e^x} = e^x y_{\text{gen}} + e^{e^x} \quad \text{OK}$$

Bonus

[+2]

$$\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} x \cos(x) dx = \left[x \sin(x) \right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} 1 \sin(x) dx = \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) + \left[-\cos(x) \right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + (0 - (-1)) = 1 + \frac{\pi}{2}$$