

Question 1

$$\text{i)} (x-1)\frac{dy}{dx} = (x+1)y \Leftrightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{x+1}{x-1} dx + c$$

$$\text{Or } \int \frac{x+1}{x-1} dx = \int \frac{x-1+2}{x-1} dx = \int \frac{x-1}{x-1} dx + \int \frac{2}{x-1} dx = x + 2\ln(x-1)$$

$$\text{Donc } \ln(y) = x + 2\ln(x-1) + c$$

$$\Rightarrow y = e^c e^x e^{2\ln(x-1)} = \boxed{C e^x (x-1)^2}$$

P

ii) On montre que cette solution vérifie bien l'équation ,car

$$y(x)' = C [e^x (x-1)^2 + 2e^x (x-1)] = C e^x (x-1)(x+1)$$

$$\text{et donc } (x-1)y' = C e^x (x-1)^2 (x+1) = c$$

$$\text{iii)} y(2) = e^3 \Leftrightarrow C e^2 (2-1)^2 = e^3 \quad \text{donc } C = e \quad \text{et } y = e^{x+1} (x-1)^2$$

$$\text{dans ce cas, par (ii) on a alors } y(x)' = (x+1)y(x)$$

$$\text{et donc } y'(2) = (2+1)e^3 = \boxed{3e^3}$$

Question 2

i) Résoudre l'équation différentielle

$$\begin{aligned}y' &= (x+1)y^3 \\ \Rightarrow \int y^{-3} dy &= \int (x+1) dx + c \\ \Rightarrow \frac{y^{-2}}{-2} &= \frac{(x+1)^2}{2} + c \\ \Rightarrow -\frac{1}{y^2} &= (x+1)^2 + c \\ \Rightarrow \boxed{y = \pm \sqrt{\frac{-1}{(x+1)^2 + c}}}\end{aligned}$$

ii) Etudier le domaine de définition de $f(x) = \sqrt{\frac{-1}{(x+1)^2 + c}}$ en distinguant si nécessaire les cas où la constante d'intégration C est positive ou négative.

première condition (imposée par la racine carée) : $\frac{-1}{(x+1)^2 + c} \geq 0$

seconde condition (imposée par le dénominateur) : $(x+1)^2 + c \neq 0$

De la première condition, on déduit que $c < 0$ (autrement dit : $c = -|c|$)

De la seconde: $(x+1)^2 - |c| \neq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 \neq |c| \Leftrightarrow (x+1) \neq \pm \sqrt{|c|} \Leftrightarrow x \neq -1 \pm \sqrt{|c|}$

Le signe de $\frac{-1}{(x+1)^2 + c}$ est positif si $-|c| < (x+1) < |c|$

Conclusion : $D_f =]-1 - \sqrt{|c|}, -1 + \sqrt{|c|}[= \boxed{]-1 - \sqrt{-c}, -1 + \sqrt{-c}[}$

Bonus :

[+3]

Trouver une solution particulière à l'équation différentielle de la question 2

telle que $y(0) = -2$

La condition $y(0) = \pm \sqrt{\frac{-1}{(0+1)^2 + c}} = -2$ nous contraint à choisir le signe $-$ à gauche.

$$\text{Donc } \sqrt{\frac{-1}{1+c}} = 2 \Rightarrow \frac{-1}{1+c} = 4 \Rightarrow -1 = 4 + 4c \Rightarrow \boxed{c = \frac{-5}{4}}$$