Méthodes de Bissection et de Newton dans une question de Maturité

Problème 1, Été 2012, 23 points

On donne l'équation différentielle du premier ordre $y' = F(x,y)$ avec $F(x,y) = x^2 + y$

et la condition initiale $y(0) = 1$.

a) Estimation de $f(4)$ par la méthode d'Euler en 4 pas (donc avec $h = 1$)

n	x_n	y_n
0	0	-1
1	1	-2
2	2	-3
3	3	-2
4	4	5

$$y_n = y_{n-1} + F(x_{n-1}, y_{n-1})h$$

b) $f(x) = \mathrm{C}e^x - x^2 - 2x - 2$ avec $C = 1$

Ce résultat se trouve *soit* par la variation de la constante, (Ansatz: $y_{\mathrm{NH}} = C(x)e^x$)

soit en recherchant la solution non homogène à partirde l'hypothèse $y_{\mathrm{NH}} = ax^2 + bx + c$

qui, dans l'équation de départ, donne : $2ax + b = x^2 + ax^2 + bx + c$

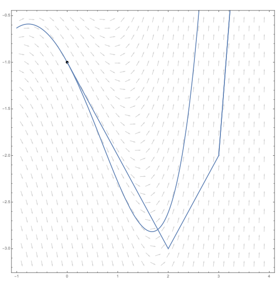
donc $a = -1$, $b = 2a = -2$ et $c = b = -2$

c) La courbe semble en effet avoir un *minimum*

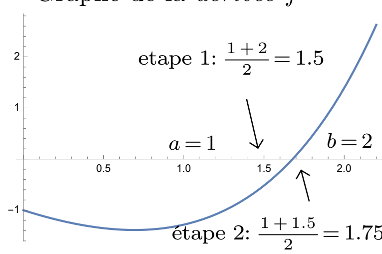
Pour le trouver, nous allons appliquer (comme demandé) l'algorithme de la bissection, ici à la *dérivée* de $f(x)$.

$f'(x) = e^x - 2x - 2$

On remarque que $f'(1) = e - 4 < 0$
et que $f'(2) = e^2 - 6 \cong 1.38 > 0$
On commence donc avec $a = 1$ et b=2



Graphe de la *dérivée* f'



1	$x_S \in]1;2[\cong]1.`;2.`[\Rightarrow x_S \cong 1.5`$
2	$x_S \in]\frac{3}{2};2[\cong]1.5`;2.`[\Rightarrow x_S \cong 1.75$
3	$x_S \in]\frac{3}{2};\frac{7}{4}[\cong]1.5`;1.75`[\Rightarrow x_S \cong 1.625$
4	$x_S \in]\frac{13}{8};\frac{7}{4}[\cong]1.625`;1.75`[\Rightarrow x_S \cong 1.6875$
5	$x_S \in]\frac{13}{8};\frac{27}{16}[\cong]1.625`;1.6875`[\Rightarrow x_S \cong 1.65625$
6	$x_S \in]\frac{53}{32};\frac{27}{16}[\cong]1.65625`;1.6875`[\Rightarrow x_S \cong 1.671875$
7	$x_S \in]\frac{107}{64};\frac{27}{16}[\cong]1.671875`;1.6875`[\Rightarrow x_S \cong 1.6796875$

Remarque

A l'étape 6 on a $f'(x_s) = -0.0216125$.
La valeur absolue de la pente de la tangente n'est donc pas encore plus petite que 0.05.

C'est selement à l'étape 7 que l'on peut s'arrêtre, puisque $f'(1.6796875) = 0.0045045$.

d) Reste à appliquer l'algorithme de Newton en prenant 2.5 comme valeur initiale,

afin de déterminer une approximation du zéro de f en deux étapes: $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$

étape		estimation
0	:	2.5
1	:	2.70598
2	:	$\boxed{2.67492}$
3	:	2.67406

e) L'abscisse du point d'inflexion vérifie $f''(x) = 0$

donc $e^x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \boxed{x_{\text{infl}} = \ln(2) \cong 0.7}$ et $f(x_{\text{infl}}) \cong -1.87$

f) Les informations réunies précédemment permettent de tracer la courbe