12 PAM **Série 6a** Mardi 7 décembre 2025

Méthodes de Bissection et de Newton dans une question de Maturité

Problème Été 2012 (23 points)

On donne l'équation différentielle du premier ordre $y' = x^2 + y$ et une condition initiale $y(0) = -1$, autrement dit $y = -1$ lorsque $x = 0$.
On appelle $f(x)$ la solution de l'équation qui respecte la condition initiale.

a) Par la méthode d'Euler, estimer $f(4)$ en quatre pas.
Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement les résultats obtenus en reportant et reliant les points calculés.

b) En résolvant l'équation différentielle, prouver que $f(x) = e^x - x^2 - 2x - 2$.

D'après les résultats de la question a) , le graphe de la fonction f passe par un minimum M dont l'abscisse est dans l'intervalle $[0;3]$ et coupe l'axe des abscisses en un point situé à droite du minimum.

c) En appliquant l'algorithme de la bissection, déterminer une approximation de l'abscisse du minimum, puis calculer l'ordonnée correspondante.
On arrêtera les calculs dès qu'on aura trouvé un point en lequel la pente de la tangente, en valeur absolue, est plus petite que 0,05.

d) En appliquant deux fois l'algorithme de Newton et en prenant $x_0 = 2{,}5$ comme valeur initiale, déterminer une approximation du zéro de f.

e) Calculer les coordonnées du point d'inflexion du graphe de f.

f) Représenter le graphe de f pour $x \in [0;3]$.