
Exercice 1

1) On cherche la solution de $y' - 3y = 7e^x - 2x + 1$

– Eq Homogène associée : $y' - 3y = 0$

donc $\int \frac{y}{y} = \int 3dx \quad \Rightarrow \boxed{y_h = c(x)e^{3x}}$

– Recherche de la solution particulière et de la solution générale

Ansatz : $y_p = c(x)e^{3x} \quad \Rightarrow y_p' - 3y_p = e^{3x}(c' + 3c) - 3ce^{3x} \Rightarrow e^{3x}c' = 7e^x - 2x + 1$

$$\Rightarrow c(x) = \int \frac{7e^x - 2x + 1}{e^{3x}} dx \ (+c)$$

$$= \int 7e^{-2x} - 2xe^{-3x} + e^{-3x} dx + c$$

$$= -\tfrac{7}{2}e^{-2x} - 2\left(-\tfrac{1}{3}xe^{-3x} - \int -\tfrac{1}{3}e^{-3x}dx\right) - \tfrac{1}{3}e^{-3x} + c \qquad \text{(intégration par partie)}$$

$$= -\tfrac{7}{2}e^{-2x} - 2\left(-\tfrac{1}{3}xe^{-3x} - \tfrac{1}{9}e^{-3x}\right) - \tfrac{1}{3}e^{-3x} + c$$

$$= -\tfrac{7}{2}e^{-2x} + \tfrac{2}{3}xe^{-3x} + \tfrac{2}{9}e^{-3x} - \tfrac{1}{3}e^{-3x} + c$$

$$= -\tfrac{7}{2}e^{-2x} + \tfrac{2}{3}xe^{-3x} - \tfrac{1}{9}e^{-3x} + c$$

donc $y_g = \left(-\tfrac{7}{2}e^{-2x} + \tfrac{2}{3}xe^{-3x} - \tfrac{1}{9}e^{-3x} + c\right)e^{3x}$

$$= \boxed{-\tfrac{7}{2}e^x + \tfrac{2}{3}x - \tfrac{1}{9} + ce^{3x}}$$

2) Vérification : $\left(-\tfrac{7}{2}e^x + \tfrac{2}{3}x - \tfrac{1}{9} + ce^{3x}\right)' - 3\left(-\tfrac{7}{2}e^x + \tfrac{2}{3}x - \tfrac{1}{9} + ce^{3x}\right)$

$$= -\tfrac{7}{2}e^x + \tfrac{2}{3} + 3ce^{3x} + \tfrac{21}{2}e^x - 2x + \tfrac{1}{3} - 3ce^{3x}$$

$$= \tfrac{2}{3} + \tfrac{14}{2}e^x - 2x + \tfrac{1}{3}$$

$$= 7e^x - 2x + 1 \qquad \text{ok!}$$

3) Trouver une solution de l'équation différentielle telle que $y_p(0) = y_0$

On pose $x = 0$ dans l'expression de y_g

Cela donne:

$$-\tfrac{7}{2} + 0 - \tfrac{1}{9} + c = y_0 \quad \Rightarrow c = y_0 + \tfrac{7}{2} + \tfrac{1}{9} = y_0 + \tfrac{65}{18}$$

Donc $\boxed{y = -\tfrac{7}{2}e^x + \tfrac{2}{3}x - \tfrac{1}{9} + \left(y_0 + \tfrac{65}{18}\right)e^{3x}}$

Exercice 2

1) i) On cherche la solution de $y' - 3y = -2x + 1$

Remarque : Cela revient à supprimer $7e^x$ dans le membre de gauche de l'E.Q précédente.

– Eq Homogène associée : $y' - 3y = 0$

donc $\displaystyle\int \frac{y}{y} = \int 3dx \quad \Rightarrow \boxed{y_h = c(x)e^{3x}}$ exactement comme précédemment

Ansatz : $y_p = c(x)e^{3x} \Rightarrow y_p' - 3y_p = e^{3x}(c' + 3c) - 3ce^{3x} \Rightarrow e^{3x}c' = -2x + 1$

$$\Rightarrow c(x) = \int \frac{-2x+1}{e^{3x}} dx \quad (+c)$$

$$= \int -2xe^{-3x} + e^{-3x}\, dx$$

$$= -2\left(-\tfrac{1}{3}xe^{-3x} - \int -\tfrac{1}{3}e^{-3x}dx\right) - \tfrac{1}{3}e^{-3x} \qquad \text{(par partie)}$$

$$= -2\left(-\tfrac{1}{3}xe^{-3x} - \tfrac{1}{9}e^{-3x}\right) - \tfrac{1}{3}e^{-3x}$$

$$= \tfrac{2}{3}xe^{-3x} + \tfrac{2}{9}e^{-3x} - \tfrac{1}{3}e^{-3x}$$

$$= \tfrac{2}{3}xe^{-3x} - \tfrac{1}{9}e^{-3x} \qquad (\text{ c'est } y_{\text{nh}} \text{ })$$

donc $y_g = \left(\tfrac{2}{3}xe^{-3x} - \tfrac{1}{9}e^{-3x} + c\right)e^{3x}$

$$= \boxed{\tfrac{2}{3}x - \tfrac{1}{9} + ce^{3x}}$$

Si l'on compare avec la solution générale précédente $(y_g = -\tfrac{7}{2}e^x + \tfrac{2}{3}x - \tfrac{1}{9} + ce^{3x})$,

on remarque que la suppression du terme $7e^x$ implique celle du terme $-\tfrac{7}{2}e^x$ de la solution !

ii) On cherche la solution de $y' - 3y = 4x^2 - 2x + 1$

L'équation homogène associée étant encore une fois la même que précédemment, on a $\boxed{y_h = c(x)e^{3x}}$

Ansatz : $y_p = c(x)e^{3x} \Rightarrow y_p' - 3y_p = e^{3x}(c' + 3c) - 3ce^{3x} \Rightarrow e^{3x}c' = x^3 - 2x + 1$

$$\Rightarrow c(x) = \int \frac{4x^2 - 2x + 1}{e^{3x}} dx = -\frac{36x^2 + 6x + 11}{27e^{3x}} \quad (+c) \qquad \text{(double intégration par partie)}$$

Donc $y_g = -\left(\frac{36x^2 + 6x + 11}{27e^{3x}} + c\right)e^{3x} = -\tfrac{4}{3}x^2 - \tfrac{2}{9}x - \tfrac{11}{27} + ce^{3x}$

On observe une petite similarité avec la solution de ***i***, et surtout l'apparition du terme $\tfrac{4}{3}x^2$.

Exercice 3

1) On cherche résoudre l'équation différentielle $\frac{y}{y'} = 3\left(1 - \frac{\cos(x)}{y'}\right)\sec(x)$?

elle peut se mettre sous la forme $y = (y' - \cos(x)\frac{3}{\cos(x)} \Rightarrow y' - \frac{\cos(x)}{3}y = \cos(x)$

donc $a(x)y' + b(x)y' = r(x)$ (non homogène)

– Eq Homogène associée : $y' - \frac{\cos(x)}{3}y = 0$ a comme solution $\boxed{y_h = ce^{\frac{\sin(x)}{3}}}$

– Recherche de la solution particulière et de la solution générale

<u>Ansatz</u> : $y_p = c(x)e^{\frac{\sin(x)}{3}} \Rightarrow y_p' - \frac{\cos(x)}{3}y = e^{\frac{\sin(x)}{3}}\left(c' + \frac{\cos(x)}{3}c\right) - \frac{\cos(x)}{3}ce^{\frac{\sin(x)}{3}} = c'e^{\frac{\sin(x)}{3}}$

Donc on doit avoir $c'e^{\frac{\sin(x)}{3}} = \cos(x) \Rightarrow c' = \cos(x)e^{\frac{-\sin(x)}{3}}$

Par la formule de substitution CRM p.81 : $c(x) = \int \sin'(x)e^{-\frac{\sin(x)}{3}}dx = -3e^{-\frac{\sin(x)}{3}}$

donc $y_p = \left(-3e^{-\frac{\sin(x)}{3}}\right)e^{\frac{\sin(x)}{3}} = -3$

La solution générale est donc $\boxed{y_g(x) = ce^{\frac{\sin(x)}{3}} - 3}$

2) A vérifier…

Exercice 4

1)

ex	$a(x)$	$b(x)$	$p_d(x)$	d	$y_p(x)$
1	-3	1	$-2x+1$	1	$\frac{2}{3}x - \frac{1}{9}$
2	-3	1	$4x^{2+} - 2x + 1$	2	$-\frac{4}{3}x^2 - \frac{2}{9}x - \frac{11}{27}$

<u>Conclusion</u>
On remarque que $y_p(x)$ est un polynôme de même degré que p_d

2) Essayons de retrouver la solution de l'exercice 2 *sans* passer par la variation de la constante.
Si notre conclusion de **(1)** est valable, alors on devrait avoir

$y_p = mx + h$ donc $(mx+h)' - 3(mx+h) = -2x + 1$

$$\Rightarrow m - 3mx - 3h = -2x + 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3m = -2 \\ m - 3h = 1 \end{cases} \Rightarrow m = \frac{2}{3} \text{ et } h = \frac{\frac{2}{3} - 1}{3} = -\frac{1}{9}$$

Ce qui donne comme résultat : $\boxed{y_s = \frac{2}{3}x - \frac{1}{9}}$

3) Essayons par la même méthode de retrouver la solution de $\boldsymbol{y' - 3y = 6x^2 - 2x + 1}$
Par la conclusion de **(1)**, on doit avoir

$y_p = ax^2 + bx + c$ donc $(ax^2 + bx + c)' - 3(ax^2 + bx + c) = 6x^2 - 2x + 1$

$$\Rightarrow 2ax + b - 3ax^2 - 3bx - 3c = 6x^2 - 2x + 1$$

$$\Rightarrow -3ax^2 - 3bx + 2ax - 3c + b = 6x^2 - 2x + 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3a = 6 \\ -3b + 2a = -2 \\ -3c + b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -2 \text{ et donc } \begin{cases} -3b - 4 = -2 \\ -3c + b = 1 \end{cases} \Rightarrow b = -\frac{2}{3} \quad \text{et} \quad c = \frac{b-1}{3} = -\frac{5}{9}$$

Ce qui donne comme résultat : $\boxed{y_s = -2x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{9}}$

et $\boxed{y_g = y_h + y_s = ce^{3x} - 2x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{5}{9}}$