PAM Problème 3 été 2025

Réponses

On donne les points $P(0;0), P(1;2), P(3;10)$ et $P(4;4k)$ $\quad k\in\mathbb{R}$

Pour illustrer ces questions par une animation, **Cliquer Ici**

a) $\bar{x}=2$ et $\bar{y}=3+k$ La valeur de k pour laquelle $\bar{x}=\bar{y}$ est $\boxed{k=-1}$

b) Var(X)= $\boxed{\frac{5}{2}}$ (pour faire un tel calcul à la calculatrice, voir vidéo ici)

c) Var(Y)= $3k^2-6k+17$ *minimum* pour $\boxed{k=1}$

d) $\rho(x,y)=\frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}=\frac{8k+8}{\sqrt{\frac{5}{2}(3k^2-6k+17)}}$

$\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow \text{Cov}(X,Y)=0 \Leftrightarrow \boxed{k=-1}$

e) $\rho(x,y)=1$ seulement si les points sont parfaitement *alignés*, ce qui n'est pas le cas ici.

f) La pente étant $\frac{\text{Cov}(X,Y)}{\text{Var}(X)}$, on cherche k tel que $\frac{8k+8}{\frac{5}{2}}=4 \Rightarrow \boxed{k=1}$

g) $\boxed{y=\frac{14}{13}x^2}$ Voir explications à la page suivante

Question g

On considère la famille de paraboles d'équation $y = cx$. $(c \in \mathbb{R})$

On cherche la valeur de c pour laquelle la somme des carrés des distances verticales entre la parabole et les quatre points

P_1: $(0;0)$, P_2: $(1;2)$, P_3: $(3;10)$ et P_4: $(4;17)$ est *minimale*.

On minimise donc la somme $\sum_{k=1}^{n} (y - y_k)^2$ c'est à dire ici

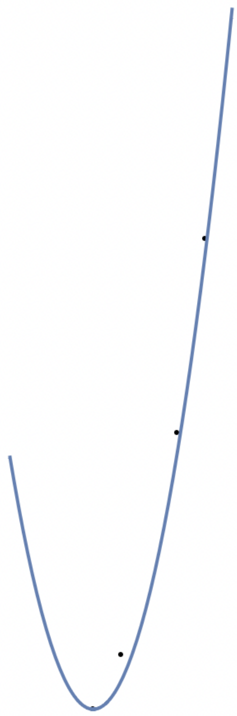
$$\sum_{k=1}^{4} (cx_k^2 - y_k)^2 = (c-2)^2 + (9c-10)^2 + (16c-17)^2$$

$$= 338\,c^2 - 728\,c + 393$$

La dérivée est $676c - 728$ La somme est *minimale* pour $\boxed{c = \frac{14}{13}}$

ce qui donne la parabole d'équation $\boxed{y = \frac{14}{13}x^2}$ $(\frac{14}{13} \cong 1.07692)$

dont le graphe est tracé gauche.



Une autre façon de trouver une parabole passant près des points consiste à *linéariser* la relation par changement de variable, en posant

$z = \sqrt{y} \quad \Leftrightarrow \quad z = \sqrt{c}\, x$

k	x_k	z_k
1	0	0
2	1	$\sqrt{2}$
3	2	$\sqrt{10}$
4	4	$\sqrt{17}$

$$\bar{x} = \frac{7}{4}$$

$$\bar{z} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{10} + \sqrt{17}}{4} \cong 2.175$$

$$V_x = \frac{35}{16} \qquad \text{Cov} \cong 2.51981$$

$$z = \frac{\text{Cov}}{V_x}(x - \bar{x}) + \bar{z} = \frac{2.51981}{\frac{35}{16}}\left(x - \frac{7}{4}\right) + 2.175 = 1.1519\,x + 0.159152$$

on revient à notre variable y par la relation $y = z^2$

donc $y(x) = (1.1519\,x + 0.159152)^2 = 1.3269x^2 + 0.36665x + 0.02533$

ce qui donne la seconde parabole dont le graphe est tracé gauche.

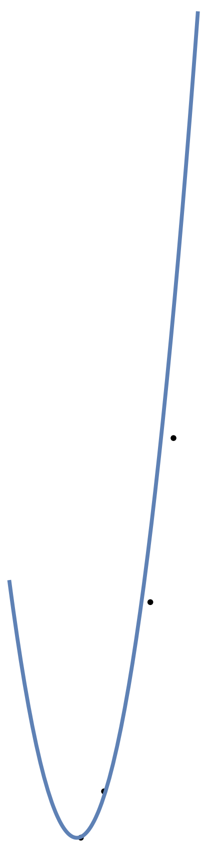
On constate que cette parabole passe beaucoup plus près du point B, et un peut plus loin des points C et D.

Remarque : Si l'on forçais la droite à passer par l'origine

alors on devrait minimiser $\sum_{k=1}^{n} (mx_k - y_k)^2$ à être minimum

donc $2(m - \sqrt{2}) + 6(3m - \sqrt{10}) + 8(4m - \sqrt{17}) = 0$

$$\Rightarrow m = \frac{2\sqrt{2} + 6\sqrt{10} + 8\sqrt{17}}{52} \cong \frac{54.78}{52} = 1.0536 = \sqrt{c} \text{ et donc } c \cong 1.11$$



<u>Remarque</u> : Cette *autre* façon de trouver un parabole ne pourrait <u>pas</u> être utilisée ici pour la question (**g**).