PAM Problème 3 été 2025

Questions

Pour illustrer ces questions par une animation, **Cliquer Ici**

Problème 3 (20 points)

On donne les points $P_1(0;0)$, $P_2(1;2)$, $P_3(3;10)$ et $P_4(4;4k)$ où k est un nombre réel.

On note $\bar{x}$ la moyenne des abscisses de ces points et $\bar{y}$ la moyenne des ordonnées de ces points. On note encore $\mathrm{Var}(X)$ la variance des abscisses et $\mathrm{Var}(Y)$ la variance des ordonnées.

a) Déterminer la valeur de k pour laquelle $\bar{x} = \bar{y}$.

b) Calculer $\mathrm{Var}(X)$.

c) Calculer $\mathrm{Var}(Y)$ en fonction de k, puis déterminer la valeur de k pour laquelle $\mathrm{Var}(Y)$ est minimale.

On s'intéresse maintenant à la droite de régression de y en x, d'équation $y = ax + b$.

Le coefficient de corrélation correspondant, noté $\rho(X,Y)$, dépend du nombre k présent dans les coordonnées du point P_4.

d) Trouver la valeur de k pour laquelle $\rho(X,Y) = 0$.

e) Expliquer par un argument géométrique pourquoi il n'existe aucune valeur de k pour laquelle $\rho(X,Y) = 1$.

f) Déterminer la valeur de k pour laquelle la pente de la droite de régression vaut 4.
Donner ensuite l'équation de cette droite.

Pour la fin du problème, on pose $k = \frac{17}{4}$, de sorte qu'on a $P_4(4;17)$.

On considère la famille de paraboles d'équation $y = cx^2$ où c est un nombre réel. Toutes ces paraboles ont $S(0;0)$ comme sommet.

g) Déterminer la valeur de c pour laquelle la somme des carrés des distances verticales entre la parabole et les quatre points $P_1(0;0)$, $P_2(1;2)$, $P_3(3;10)$ et $P_4(4;17)$ est minimale.

Il n'est pas nécessaire d'avoir traité le début du problème pour répondre à cette dernière question.