Complément sur l'intégration par partie

Comme nous l'avons vu en classe, l'intégration par partie est une méthode permettant l'intégration d'un produit de deux fonction.

La formule de correspondante se trouve aux page 81 (primitive) et 85 (intégrale) des formulaires CRM.

$$\boxed{\int f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,dx}$$

Voyons quelques exemples

1) $\displaystyle\int x\sin(x)dx$ on pose $\begin{cases} f'(x) = \sin(x) \Rightarrow f(x) = -\cos(x) \\ g(x) = x \Rightarrow g'(x) = 1 \end{cases}$

donc $\displaystyle\int x\sin(x)dx = -x\cos(x) - \int -\cos(x)\,dx = -x\cos(x) + \sin(x) + c$

Vérification : $(-x\cos(x) + \sin(x) + c)' = -\cos(x) + x\sin(x) + \cos(x) = x\sin(x)$

2) $\displaystyle\int x\log(x)dx$ on pose $\begin{cases} f'(x) = \quad \Rightarrow f(x) = \\ g(x) = \quad \Rightarrow g'(x) = \end{cases}$

donc $\displaystyle\int x\log(x)dx =$

Vérification :

3) Revenons maintenant à l'équation différentielle non homogène $y' - 3y = -2x + 1$ $(\star)$

dont l'équation homogène associée est $y' - 3y = 0$ avec comme solution $y_h = ce^{3x}$

Ansatz : $y_{\mathrm{nh}} = c(x)\,e^{3x}$

Par substitution dans $(\star)$: $c'(x)\,e^{3x} + 3c(x)\,e^{3x} - 3c(x)\,e^{3x} = -2x + 1$

$$\Rightarrow c'(x) = (-2x+1)\,e^{-3x} = e^{-3x} - 2x\,e^{-3x}$$

$\displaystyle\Rightarrow c(x) = -\frac{1}{3}e^{-3x} - 2\int x\,e^{-3x}dx$ on pose $\begin{cases} f'(x) = \quad \Rightarrow f(x) = \\ g(x) = \quad \Rightarrow g'(x) = \end{cases}$

donc $\displaystyle\int x\,e^{-3x}\,dx =$

Vérification :

Conclusion : $c(x) =$ et donc $y_{\mathrm{nh}} =$