Polynômes, division Euclidienne et méthode d'Horner Réponses

Question 1 :

Soit $P(x)=x^3-3x^2+(c+2)x-c \qquad (c\in\mathbb{R})$

La pente de la tangente en $x_0=1$ à la courbe d'équation $y=P(x)$ vaut 2. Trouver c.

Méthode classique (analytique)

On dérive $P'(x)$ et résout l'équation $P'(1)=2$
$P'(x)=3x^2-6x+c+2$
$P'(1)=c-1 \quad \Rightarrow c-1=2 \quad \Rightarrow \boxed{c=3}$

Méthode utilisant le théorème sur $P'(x)$

$P(1)=1-3+(c+2)-c=0$
$\Rightarrow P(x)$ divisible par $(x-1)$
cherchons $Q(x)$ tel que $P(x)=Q(x)(x-1)$

1	-3	$c+2$	$-c$
$\downarrow$	1	-2	c
1	-2	c	0

$\Rightarrow Q(x)=x^2-2x+c$
$Q(1)\neq 0$ donc $m=1$

Par le théorème, $P'(x_0)=Q(x_0)$ avec $x_0=1$

donc $2=Q(1)=c-1 \quad \Rightarrow \boxed{c=3}$

Question 2 : (Matu été 2013)

a) Montrer que si z est un *zéro double* du polynôme $P(x)$,
alors z est également un zéro du polynôme $P'(x)$ (la dérivée de $P(x)$).

Il s'agit de la démonstration de théorème (avec $x_0=z$), dans le cas particulier où $m=2$

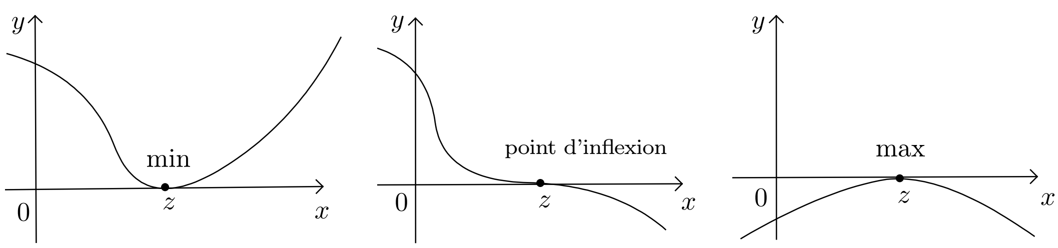
$P(x)=Q(x)(x-z)^2 \Rightarrow P'(x)=Q'(x)(x-z)^2+2Q(x)(x-z)$

donc $P(z)=0$. Il s'en suit que z est bien un zéro du polynôme $P'(x)$.

b) Pourquoi un zéro double d'un polynôme ne peut pas être calculé
ou approché à l'aide de l'algorithme de la bissection ?

Si la racine $x=z$ est de multiplicité $m>1$, non seulement $P(z)=0$, mais aussi $P'(z)=0$ ainsi que les dérivées les suivantes jusqu'à $P^{(m-1)}(z)$ qui sont également *nulles*.

Il s'en suit que non seulement la courbe touche l'axe des abscisse en $x=z$, mais aussi que sa tangente est *horizontale* en ce point, ce qui donne les 3 possibilités suivantes :



Dans la cas où la multiplicité est exactement $m=2$, seule $f(z)$ et $f'(z)$ sont nulles et donc pas les suivantes, ce qui exclu la possibilité du point d'inflexion.

Dans ce cas, il n'y a pas de changement de signe autour de z, c'est dire que pour un assez *petit* intervalle $a<z<b$, on a $f(a)f(b)>1, \Rightarrow$ la méthode de bissection ne marche plus !

c) Ecrire le polynôme $P(x) = 12x^3 - 52x^2 + 75x - 36$ sous forme d'un produit de polynômes du premier degré à coefficients entiers, sachant que $P(x)$ possède un *zéro double*.

Utiliser le résultat de la question a) et employer le schéma de Horner.

On a dérivé $P(x)$ en classe : $P'(x) = 36x^2 - 104x + 75$, polynôme de second degré avec $\Delta = 16$

Ses racines (zéros) sont $\frac{254}{18}$ et $\frac{3}{2}$

Selon notre théorème : si x_0 est un *zéro double* de $P(x)$ alors $P'(x_0) = 0$

Il s'en suit que le *zéro double* de $P(x)$ est l'un des deux zéros de $P'(x)$: $\frac{25}{18}$ ou $\frac{3}{2}$

C'est bien le cas de $\frac{3}{2}$, car
$$P(\tfrac{3}{2}) = 12\left(\tfrac{3}{2}\right)^3 - 52\left(\tfrac{3}{2}\right)^2 + 75\left(\tfrac{3}{2}\right) - 36$$
$$= 12\left(\tfrac{27}{8}\right) - 52\left(\tfrac{9}{4}\right) + 75\left(\tfrac{3}{2}\right) - 36$$
$$= \frac{3 \times 27}{2} - \frac{26 \times 9}{2} + \frac{225}{2} - 36$$
$$= \frac{81 - 234 + 225 - 72}{2} = 0$$

$\frac{3}{2}$ est donc racine *double* $\Rightarrow$ On peut donc diviser deux fois $P(x)$ par $\left(x - \frac{3}{2}\right)$

Méthode 1 : Appliquer deux fois Horner
(c'est ce qui est demandé dans cette question !)

12	−52	75	−36
↓	18	−51	36
12	−34	24	0

quotient intermédiaire : $12x^2 - 34x + 24$

12	−34	24
↓	18	−24
12	−16	0

$\Rightarrow Q(x) = 12x - 16$

Méthode 1 : Division euclidienne

$$\begin{array}{l|l} 12x^3 - 52x^2 + 75x - 36 & x^2 - 3x + \frac{9}{4} \\ \hline & 12x - 16 \\ -(12x^3 - 36x^2 + 27x) & \\ \quad -16x^2 + 48x - 36 & \\ \quad -(16x^2 + 48x - 36) & \\ \quad\quad 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow Q(x) = 12x - 16$

<u>Conclusion</u> : $P(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2(12x - 16) = 4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2(3x - 4) = \boxed{(2x - 3)^2(3x - 4)}$

<u>Vérification</u> : $(2x - 3)^2(3x - 4) = (4x^2 - 6x + 9)(3x - 4) = 12\,x^3 - 52\,x^2 + 75\,x - 36$

Question 3 : (Matu été 2024)

On considère les polynômes P et S donnés par

$P(x) = 12x^3 + 20x^2 - 27x - 45$ et $S(x) = 12x^3 + 20x^2 + 3x + 5$.

Ecrire le polynôme P sous la forme d'un produit de 3 polynômes du premier degré à coefficients entiers, sachant qu'un des zéros de P est également un zéro de s.

$\frac{S}{P} = 1 + \frac{30x + 90}{P}$ $\Leftrightarrow S = P + 10(3x + 5)$ donc la racine commune est $-\frac{5}{3}$

12	20	− 27	− 45
	− 20	0	45
12	0	− 27	0

$P(x) = \left(x + \frac{5}{3}\right)(12x^2 - 27) = 3\left(x + \frac{5}{3}\right)(4x^2 - 9) = (3x + 5)(2x - 3)(2x + 3)$