Polynômes, division Euclidienne et méthode d'Horner

I] Un peu de théorie

Considérons $P(x)$ un polynôme en x, de degré n $(n \in \mathbb{N}^+)$

Remarques

i) Pour tout nombre *réel* a, il est possible d'écrire $P(x) = Q(x)(x-a) + R$

Dans le cas où a est une *racine* (un *zéro*) de $P(x)$, on a $R = 0$, sinon $R \neq 0$

ii) Dans les deux cas, $R = P(a)$

Définition: x_0 est racine de *multiplicité* m $(m \in \mathbb{N}^+)$) $\Leftrightarrow P(x)$ *divisible* par $(x - x_0)^m$

$\Leftrightarrow P(x) = Q(x).(x-x_0)^m$

Théorème : si x_0 est racine de multiplicité $m = 1$ alors $P'(x_0) = Q(x_0)$

si x_0 est racine de multiplicité $m > 1$ alors $P'(x_0) = 0$

Démonstration : $P'(x) = Q'(x).(x-x_0)^m + Q(x).m(x-x_0)^{m-1}$

en particulier si $m = 1$: $P'(x) = Q'(x).(x-x_0) + Q(x)$

et dans ce cas $P'(x_0) = Q(x_0)$

alors que si $m > 1$ on obtient: $P'(x_0) = Q(x_0) \times 0 = 0$

Formule à la base de la méthode de Horner (facultatif) : $p_k = q_{k-1} - x_0\, q_k \quad (n < k < 0)$

II] Exemple de questions impliquant (entre autres) les relations ci-dessus

Question 1 :

Soit $P(x) = x^3 - 3x^2 + (c+2)x - c \quad (c \in \mathbb{R})$

La pente de la tangente en $x = 1$ à la courbe d'équation $y = P(x)$ vaut 2. Trouver c.

Question 2 : (Matu été 2013)

On dit que le nombre z est un *zéro double* du polynôme $P(x)$
si celui-ci peut s'écrire sous la forme $P(x) = (x-z)^2 \cdot Q(x)$,
où $Q(x)$ est un polynôme dont z n'est pas un zéro.

a) Montrer que si z est un zéro double du polynôme $P(x)$,
alors z est également un zéro du polynôme $P'(x)$ (la dérivée de $P(x)$).

b) Expliquer pourquoi un zéro double d'un polynôme ne peut pas être calculé ou approché à l'aide de l'algorithme de la bissection.

c) Ecrire le polynôme $P(x) = 12x^3 - 52x^2 + 75x - 36$ sous forme d'un produit de polynômes du premier degré à coefficients entiers, sachant que $P(x)$ possède un *zéro double*.

Utiliser le résultat de la question a) et employer le schéma de Horner.

Question 3 : (Matu été 2024)

On considère les polynômes P et S donnés par
$P(x) = 12x^3 + 20x^2 - 27x - 45$ et $S(x) = 12x^3 + 20x^2 + 3x + 5$.

Ecrire le polynôme P sous la forme d'un produit de 3 polynômes du premier degré à coefficients entiers, sachant qu'un des zéros de P est également un zéro de s.