12 PAM **Série 4** Jeudi 20 Novembre 2025

Méthode d'Euler Réponses

Nous avons vu en classe le principe à la base de cette méthode itérative, qui se résume par

$$\boxed{\begin{cases} x_{n+1}=x_n+h \\ y_{n+1}=y_n+f'(x_n)\cdot h \end{cases}}$$

avec (x_1, y_1) ou (x_0, y_o) donné comme *condition initiale*

h: le pas d'*incrémentation*

$f'(x)=F(x,y)$ donc $f'(x_n)=F(x_n,y_n)$

<u>Exemple 1</u> On considère l'E.D. $(x+5)\cdot y'+y=4x-3$ avec $f(3)=1$ et que l'on cherche à estimer $f(5)$ en 4 pas. Il faut donc prendre $h=\frac{5-3}{4}=\boxed{\frac{1}{2}}$ avec $F(x,y)=\frac{4x-y-3}{x+5}$

Les deux premières itérations donnent

$$\begin{cases} x_0=3 \\ f(x_0)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=3+\frac{1}{2}=\boxed{\frac{7}{2}}=3.5 \\ f(x_1)=1+\frac{4\times 3-1-3}{3+5}\cdot\frac{1}{2}=\boxed{\frac{3}{2}}=1.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2=3.5+0.5=\boxed{4} \\ f(x_2)==\frac{3}{2}+\frac{19}{34}=\boxed{\frac{35}{17}}\cong 2.06 \end{cases}$$

et il restera encore $\boxed{2}$ itérations pour trouver la réponse.

$$\begin{cases} x_3=\boxed{4.5} \\ f(x_3)=\frac{35}{17}+\frac{4\times 4-\frac{35}{17}-3}{4+5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{35}{17}+\frac{16-\frac{86}{17}}{9\times 2}=\boxed{\frac{8}{3}}\cong 2.67 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4=4.5+0.5=\boxed{5} \\ f(x_4)=\frac{8}{3}+\frac{4\times\frac{9}{2}-\frac{8}{3}-3}{\frac{9}{2}+5}\cdot\frac{1}{2}=\boxed{\frac{63}{19}}\cong 3.316 \end{cases}$$

Résolution de l'équation différentielle:

Equation homogène associée : $(x+5)\cdot y'+y=0$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{y}\cdot dy=-\int \frac{1}{x+5}dx+c$$

$$\Rightarrow \ln(y)=-\ln(x+5)+c$$

$$\Rightarrow y_H=\frac{C}{x+5}$$

<u>Ansatz</u> : $y_{\text{NH}}=\frac{C(x)}{x+5}$ donc $y'_{\text{NH}}=-\frac{C}{(x+5)^2}+\frac{C'}{x+5}$

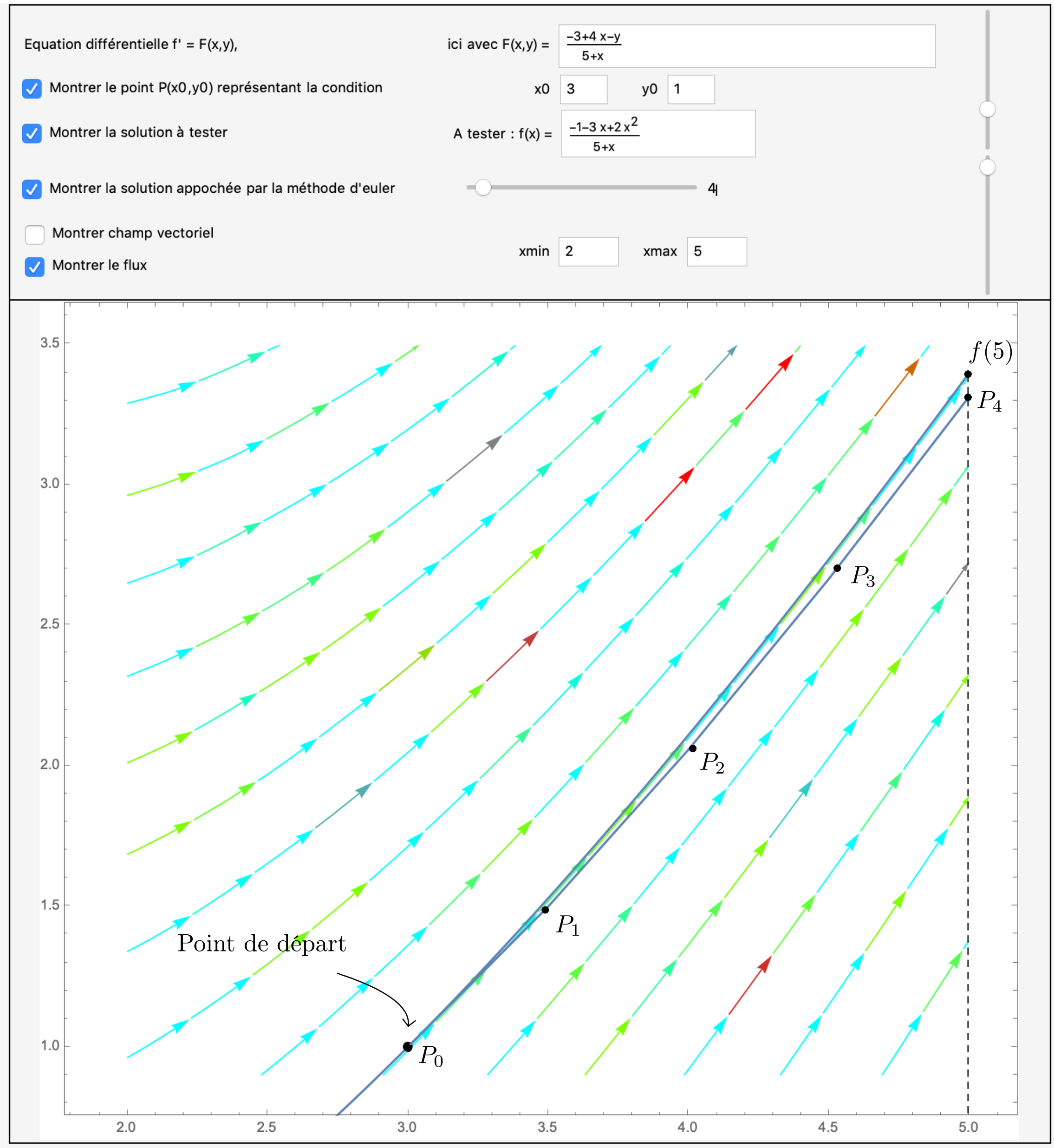
L'équation différentielle devient : $-\frac{C}{(x+5)}+C'+\frac{C}{x+5}=4x-3$ donc $C(x)=4\frac{x^2}{2}-3x \quad (+C)$

Par l'ansatz : $y_{\text{NH}}=\frac{2x^2-3x}{x+5}$

Finalement $y_{\text{gen}}=y_H+y_{\text{NH}}=\frac{C}{x+5}+\frac{2x^2-3x}{x+5}=\frac{2x^2-3x+C}{x+5}$

Si $f(3)=1$ alors $\frac{18-9+C}{8}=1$ et donc $C=-1$ donc $y_{\text{part}}=\frac{2x^2-3x-1}{x+5}$ $(:=f(x))$

Donc $f(5)=\frac{50-15+(-1)}{10}=\frac{17}{5}=3.4$

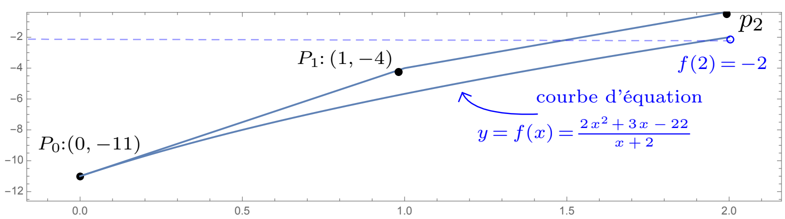


Exemple 2 On considère l'E.D. $(x+2)\cdot y'+y=4x+3$ avec $f'(0)=7$ et que l'on cherche à estimer $f(2)$ en 2 pas. Il faut donc prendre $h=\boxed{1}$ avec $F(x,y)=\frac{4x-y+3}{x+2}$

$$\begin{cases} x_0=0 \\ f(x_0)=-11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ f(x_1)=-11+\frac{4\times 0-(-11)+3}{0+2}=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2=2 \\ f(x_2)=-4+\frac{4\times 1-(-4)+3}{1+2}=\frac{-1}{3} \end{cases}$$

La solution particulière de l'équation différentielle est ici : $y_{\text{part}}=\frac{2x^2+3x-22}{x+2}$ $(:=f(x))$

Ainsi $f(2)=-2$ Il y a une assez grande différence entre $f(2)$ et l'estimation $f(x_2)=\frac{-1}{3}$



Exemple 3

Il arrive qu'une question de maturité de donne *pas* la valeur initiale de x qui du coup est considérée comme une *inconnue* ("k"). C'est la cas de la question suivante:

> On considère l'équation différentielle $y' = \frac{3y}{x} - \frac{8}{x^3}$ et on note s sa solution particulière satisfaisant la condition initiale $s(1) = k$, où k est un nombre réel.
>
> a) On emploie la méthode d'Euler pour estimer en 2 pas la valeur de $s(3)$.
> Trouver la valeur de k pour laquelle cette estimation vaut 9.
>
> b) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle.
>
> c) On pose $k = 2$. Déterminer alors $s(x)$.

Les deux itérations donnent, avec $\boxed{h=1}$ et $\boxed{F(x,y) = \frac{3y}{x} - \frac{8}{x^3}}$

$$\begin{cases} x_0 = \boxed{1} \\ f(x_0) = \boxed{k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \boxed{2} \\ f(x_1) = k + \frac{3k}{1} - \frac{8}{1^3} = \boxed{4k-8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \boxed{3} \\ f(x_2) = (4k-8) + \frac{3(4k-8)}{2} - \frac{8}{2^3} \end{cases}$$

a) Ainsi $f(x_2) = 4k - 8 + 6k - 12 - \frac{8}{8} = 10k - 21$ et « comme est estimation vaut 9 » : $10k - 21 = 9$

donc $\boxed{k=3}$

b) Je vous laisse trouver la solution de l'équation différentielle.

$y_g = c\,x^2 + \frac{2}{x^2}$ $\quad y_p = (k-2)x^2 + \frac{2}{x^2}$ $\quad$ si $k = 2$, alors $\boxed{s(x) = \frac{2}{x^2}}$

Remarque : si $k = 3$ alors $s(x) = x^2 + \frac{2}{x^2}$ et donc $s(3) = 9 + \frac{2}{9} \cong 9.22$ compatible avec (a) !

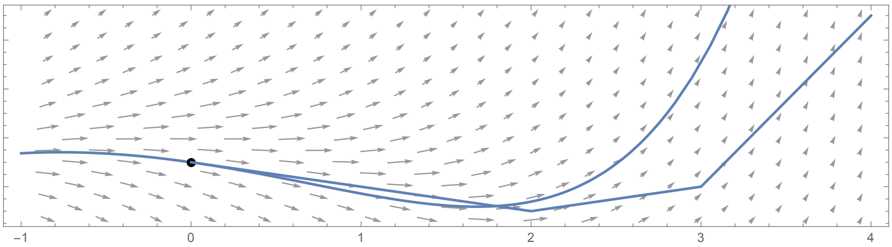
Exemple 4 (Maturité été 2012)

On donne l'équation différentielle du premier ordre $y' = x^2 + y$ et une condition initiale $y(0) = -1$, autrement dit $y = -1$ lorsque $x = 0$.
On appelle $f(x)$ la solution de l'équation qui respecte la condition initiale.

a) Par la méthode d'Euler, estimer $f(4)$ en quatre pas.
Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement les résultats obtenus en reportant et reliant les points calculés.

b) En résolvant l'équation différentielle, prouver que $f(x) = e^x - x^2 - 2x - 2$.

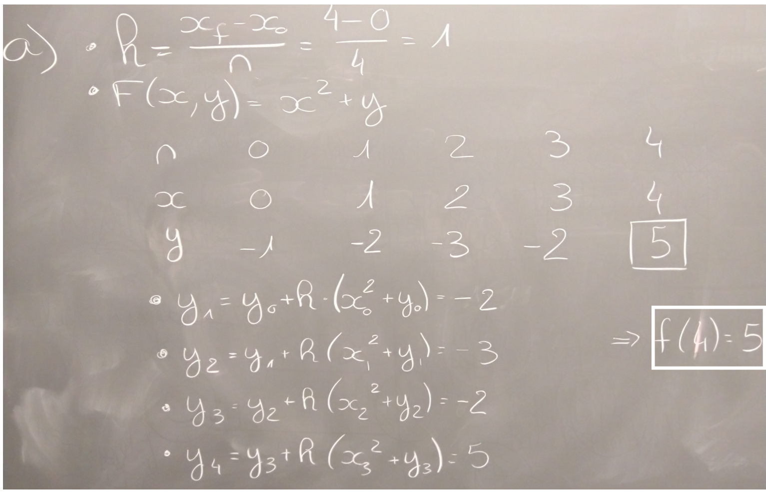
L' application n'est malheureusement plus disponible sur mon site en raison de la politique commerciale de Wolfram

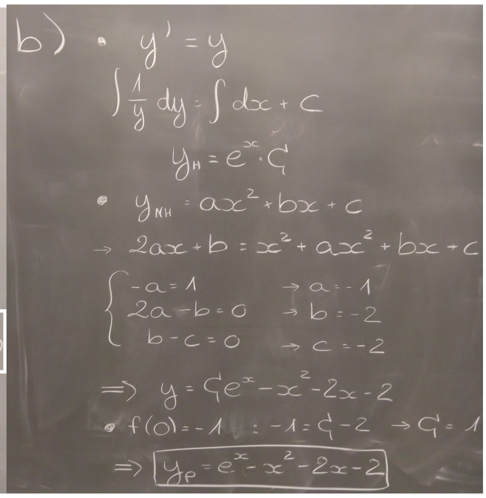


n	x_n	y_n	$f(x_n)$
0	0.	1	-1.
1	1.	-2	-2.28172
2	2.	-3	-2.61094
3	3.	-2	3.08554
4	4.	5	28.5982

image 1

Voici les calculs. Merci à Lara pour sa contribution !





On remarque (image 1) que les courbes se séparent dramatiquement pour $x > 2$.

En particulier, pour $x = 4$, la solution exacte est $e^4 - 26 \cong 28.29$, ce qui est bien plus grand que $y_4 = 5$.

Remarques :

1) $x_4 = 4$ et $y_4 = 5$

2) L'image 2 ci-contre illustre la *méthode d'Euler* à 16 pas,
avec la courbe de la solution exacte de l'équation différentielle.
On voit que cette nouvelle courbe polygonale est plus proche de la solution que celle obtenue avec 4 pas, mais s'en éloigne aussi beaucoup lorsque x>2.
ici $h = \frac{4-0}{16} = 0.25$, et on obtient pour $y(4)$ l'estimation $y_{16} = 18.16$

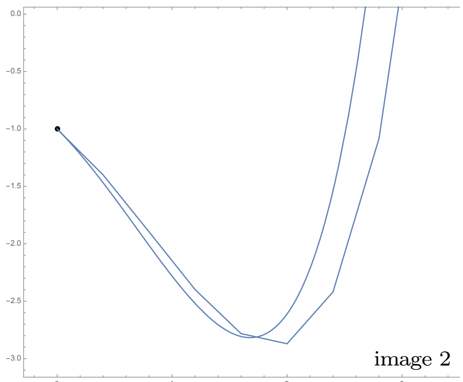


image 2