Méthode d'Euler

Nous avons vu aujourd'hui le principe à la base de cette méthode itérative, qui se résume par

$$\boxed{\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h \\ f(x_{n+1}) = f(x_n) + f'(x_n)\cdot h \end{cases}}$$

avec (x_1, y_1) ou (x_0, y_o) donné comme *condition initiale*

h: le pas d'*incrémentation*

f' est connue par l'énoncé de l'E.D (du premier ordre), qui peut se mettre sous la forme $f' = F(x, y)$.

Remarque : Les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ F(x,y) \end{pmatrix}$ sont *tangents* aux courbes des solutions.

<u>Exemple 1</u> On considère l'E.D. $(x+5)\cdot y' + y = 4x - 3$ avec $f(3) = 1$ et que l'on cherche à estimer $f(5)$ en 4 pas. Il faut donc prendre $h =$ avec $F(x, y) =$

Les deux premières itérations donnent

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ f(x_0) = \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \\ f(x_1) = \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \\ f(x_2) = \end{cases}$$

et il restera encore ___ itérations pour trouver la réponse.

<u>Exemple 2</u> On considère l'E.D. $(x+2)\cdot y' + y = 4x + 3$ avec $f'(0) = 7$ et que l'on cherche à estimer $f(2)$ en 2 pas. Il faut donc prendre $h =$ avec $F(x, y) =$

$$\begin{cases} x_0 = \\ f(x_0) = \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \\ f(x_1) = \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \\ f(x_2) = \end{cases}$$

<u>Exemple 3</u>

Il arrive qu'une question de maturité de donne *pas* la valeur initiale de x qui du coup est considérée comme une *inconnue* ("k"). C'est la cas de la question suivante:

> On considère l'équation différentielle $y' = \frac{3y}{x} - \frac{8}{x^3}$ et on note s sa solution particulière satisfaisant la condition initiale $s(1) = k$, où k est un nombre réel.
>
> a) On emploie la méthode d'Euler pour estimer en 2 pas la valeur de $s(3)$.
> Trouver la valeur de k pour laquelle cette estimation vaut 9.
>
> b) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle.
>
> c) On pose $k = 2$. Déterminer alors $s(x)$.

Les deux itérations donnent

$$\begin{cases} x_0 = \\ f(x_0) = \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \\ f(x_1) = \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \\ f(x_2) = \end{cases}$$

donc $k = ?$

Exemple 4

Passons maintenant à un exemple plus évolué (Maturité été 2012)

On donne l'équation différentielle du premier ordre $y' = x^2 + y$ et une condition initiale $y(0) = -1$, autrement dit $y = -1$ lorsque $x = 0$.
On appelle $f(x)$ la solution de l'équation qui respecte la condition initiale.

a) Par la méthode d'Euler, estimer $f(4)$ en quatre pas.
Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement les résultats obtenus en reportant et reliant les points calculés.

b) En résolvant l'équation différentielle, prouver que $f(x) = e^x - x^2 - 2x - 2$.

L'image 1 ci-dessous illustre la réponse à (a) au moyen d'une application que je vous invite à essayer. (Sur mon site : Menu Maths12 → PAM → Programmation : *Visualisateur... Euler*).

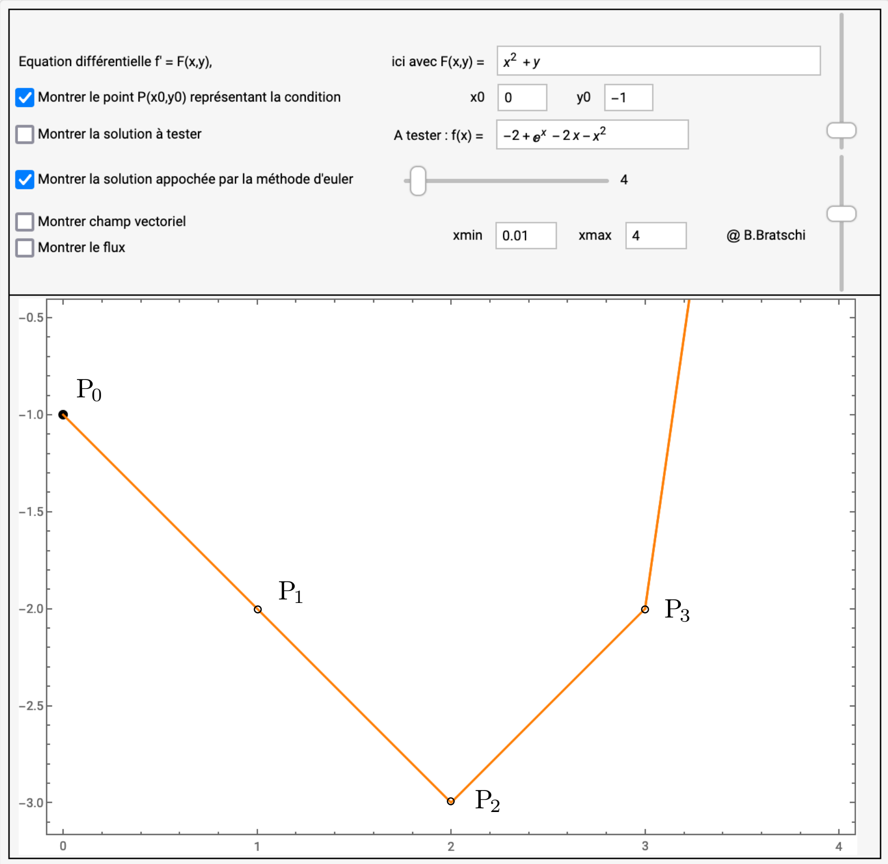

image 1

Remarques :

1) P_4 sort du cadre de l'image 1.
Que vaut x_4 et quelle est la valeur exacte de $f(x_4)$?

2) L'image 2 ci-contre illustre la *méthode d'Euler* à 16 pas,
et montre aussi la solution exacte de l'équation différentielle.
A nouveau P_4 sort du cadre. Ici que vaut h ?

3) Cette question de maturité continue.
On verra comment la résoudre intégralement
lors d'un prochain cours.

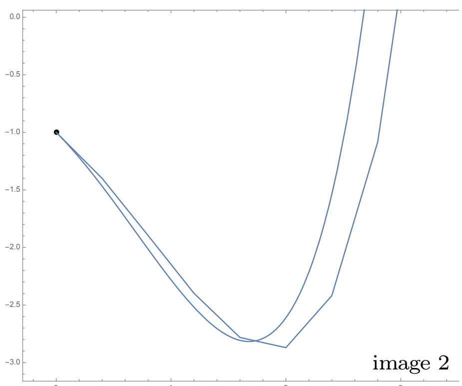

image 2