12 PAM **Série 9** Vendredi 30 janvier 2026

Optimisation Linéaire

(dernier point du chapitre *Algorithme* du programme PAM)

Définition

L'*optimisation linéaire* est une méthode pour maximiser ou minimiser une quantité

(bénéfice, coût, perte d'énergie, volume ...) décrite par une fonction *linéaire* en un certain nombre de variables, sous des contraintes exprimées par des inégalités (également *linéaires* en ces mêmes variables).

Comme cette définition est un peu abstraite, le plus simple est de commencer par un exemple.

Exemple

Une entreprise construit 2 produits P_1 et P_1 avec 3 machines M_1, M_2, M_3
Le tableau donne le **temps** de production (en heure) et le prix, pour chacun de ces produits ainsi que le temps de fonctionnement (heures) de chaque machine en un mois

Machine \ Produit	$\boldsymbol{P_1}$	$\boldsymbol{P_2}$	temps de fonctionnement en un mois
$\boldsymbol{M_1}$	1h	1h	150 h
$\boldsymbol{M_2}$	1h	3h	210 h
$\boldsymbol{M_3}$	0h	3h	180 h
Prix	300 CHF	500 CHF	

On se pose alors la question suivante : Comment *maximiser* le bénéfice sous ces contraintes ?

Méthode (en 5 étapes) et résolution

1] Que cherche-t-on à optimiser ?

Ici il s'agit du *bénéfice mensuel* $\mathcal{B}$ que l'on aimerait *maximiser*.

2] Quelles sont les *variables* ?

Ici il s'agit de x: nombre d'unités du produits $\boldsymbol{P_1}$ à vendre

y: nombre d'unités du produits $\boldsymbol{P_2}$ à vendre

3] Exprimer la *quantité à optimiser* en fonction des variables sélectionnées,

ici c'est $\mathcal{B} = f(x, y) = 300x + 500y$ Remarque : Cette fonction est *linéaire* en x et y.

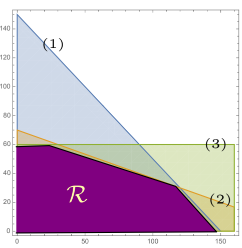
4] Quelles sont les *contraintes* ?

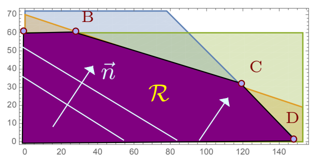
ce sont ici : $\begin{cases} x + y \leqslant 150 & (1) \\ x + 3y \leqslant 210 & (2) \\ 3y \leqslant 180 & (3) \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$ Remarque : Ces contraintes sont *linéaires* en x et y.

5] Représentation graphique

Sur la figure, (1), (2),(3) sont les droites qui coupent le plan selon les 3 inégalités correspondantes (ci-dessus).
$\mathcal{R}$ est la région qui satisfait l'ensemble des contraintes.
O,A,B,C,D sont les sommets du polygone $\mathcal{R}$.

O:(0;0), A:(0;60), B:(30;60), C:(120;30), D:(150,0)





$\vec{n}$ est le vecteur *normal* à la famille de droite d'équation $y = 50 - \frac{1}{3}x$ ici $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Solution

$\mathcal{B}$ est maximum en C ($\mathcal{B}_{\max} =$ 51'000 CFH)
Il faut donc vendre 120 unités $\boldsymbol{P_1}$ et 30 $\boldsymbol{P_2}$.

Un bar est spécialisé dans les smoothies, boissons formées à partir de lait et de fruits.

Chaque matin, le restaurateur dispose de 2 kg de fraises, 9 kg de bananes et 10 kg de lait avec lesquels il produit deux types de smoothies, les « fraise banane » abrégés *FB* et les « banane pure » abrégés *BP*.

Les ingrédients pour faire un verre de smoothie *FB* sont 40 g de fraises, 60 g de bananes et 100 g de lait, alors que pour faire un verre de smoothie *BP* il faut 100 g de bananes et 100 g de lait.

On note x le nombre de verres de *FB* et y le nombre de verres de *BP*.

a) Déterminer graphiquement le domaine (sous-ensemble du plan) dans lequel on peut choisir x et y. Hachurer ce domaine.

b) Les verres de *FB* sont vendus 5.- et les verres de *BP* 4.-. On suppose de plus que tous les verres produits sont vendus.

   Combien de verres de *FB* et combien de verres de *BP* doit produire ce restaurateur pour obtenir le plus grand bénéfice possible ?

   Lui reste-t-il des fraises, des bananes ou du lait après avoir réalisé ses smoothies ? Si oui, combien ?

c) Le restaurateur remarque qu'il vend plus de verres de *BP* que de *FB* et décide d'inverser les prix. Quel est alors le plus grand bénéfice possible ?

   Lui reste-t-il des fraises, des bananes ou du lait après avoir réalisé ses smoothies ? Si oui, combien ?

FB : 40g Fraise 60g banane 100g. lait
BP : 100g banane 100g lait

A disposition : 2kg fraises 9kg banane 10kg lait

x : nombre de FB
y : nombre de BP

) fraise : $40x < 2000$ $\qquad x < 50$
banane : $60x + 100y < 9000$ $\qquad 3x + 5y < 450$
lait : $100x + 100y < 10\,000$ $\qquad x + y < 100$