Statistiques descriptives, Lois Binomiale & Normale

Question 1

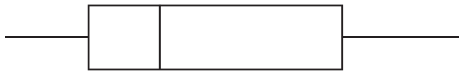
Un ensemble de données est :

18 ; 18 ; 19 ; 19 ; 20 ; 22 ; 22 ; 23 ; 27 ; 28 ; 28 ; 31 ; 34 ; 34 ; 36 .

Boite à moustache ou *Box-plot*

Le diagramme à boîtes et moustache de ces données est représenté ci-dessous.

Médiane
Quartiles



A B C D E

(a) Donnez les valeurs de A, B, C, D et E.

A = ... B = ... C = ... D = ... E = ...

(b) Trouvez l'intervalle interquartile.

Question 2

Loi *Binomiale* variable *discrète*, sous certaines conditions

Loi *Normale* variable *continue*, sous certaines conditions

Un (petit) théâtre compte 100 places.

Pour la représentation de samedi prochain un nombre n de billets ont été vendus. La vente de billets est maintenant terminée et seules les personnes ayant acheté un billet peuvent se présenter au théâtre samedi.

On considère que la probabilité qu'une personne ayant un billet se rende effectivement à cette représentation vaut $p = 0.9$.

Soit X la variable aléatoire relative au nombre de personnes qui se rendront au théâtre samedi. Cette variable X suit une loi (distribution) binomiale.

a) Si $n = 100$, quelle est la probabilité que la salle soit pleine samedi (les 100 places sont occupées) ?

b) Si $n = 101$, quelle est la probabilité que toutes les personnes qui se présenteront au théâtre samedi auront une place ?

c) Si $n = 103$, quelle est la probabilité que toutes les personnes qui se présenteront au théâtre samedi auront une place ?

Pour la suite du problème, **on approxime la loi binomiale par la loi normale**.

d) Donner, en fonction de n, l'espérance $E(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$ de la variable aléatoire X.

e) On a vendu 110 billets ($n = 110$). Quelle est la probabilité que toutes les personnes qui se présenteront samedi auront une place ? Donner la réponse avec une précision au centième.

f) Quel est le nombre de billets vendus si la probabilité que toutes les personnes qui se présenteront samedi auront une place vaut 95% ?

a)
$P = 2.656 \cdot 10^{-5}$ (voir tableau)

b)
$P = 0.999976$ (voir tableau)

c)
$P = 0.998503$ (voir tableau)

d)
$E(x) = np = \frac{9n}{10}$

$\sigma = \sqrt{np\,(1-p)} = \frac{3\sqrt{n}}{10}$

e)
$P = 68.32\%$ (voir tableau)

f)
$\frac{100.5 - 0.9\,n}{0.3\sqrt{n}} = 1.645$ $\boxed{n \cong 106}$

Réponses:

Q 1

a) A=18, B=19 C=23 D=31 E=36

b) IQR =4

Q 2

n	$\binom{n}{100}\left(\frac{9}{10}\right)^{100}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-100}$	$\sum_{k=0}^{100}\binom{n}{k}\left(\frac{9}{10}\right)^{k}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-k}$	$\varphi\left(\frac{0-\frac{1}{2}-\frac{9n}{10}}{\frac{3\sqrt{n}}{10}}\right)-\varphi\left(\frac{100+\frac{1}{2}-\frac{9n}{10}}{\frac{3\sqrt{n}}{10}}\right)$	ε_r %
100	$2.656 \cdot 10^{-5}$	1.	0.999767	0.023
101	$2.683 \cdot 10^{-4}$	0.999976	0.999274	0.070
102	$1.368 \cdot 10^{-3}$	0.999735	0.997957	0.177
103	$4.697 \cdot 10^{-3}$	0.998503	0.994794	0.371
104	$1{,}221 \cdot 10^{-2}$	0.994276	0.987944	0.637
105	$2.565 \cdot 10^{-2}$	0.983284	0.974519	0.891
106	$4.531 \cdot 10^{-2}$	0.960201	0.95065	0.995
107	$6.926 \cdot 10^{-2}$	0.919421	0.912041	0.803
109	0.113242	0.772933	0.778239	-0.687
110	0.124567	0.671014	0.683223	-1.819
115	0.063663	0.173673	0.175538	-1.074

Table CRM p.109

Approximation de la loi binomiale par la loi normale

Si X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$ avec n grand, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$, on peut estimer $P(a \leq X \leq b)$ à l'aide de la loi normale $\mathcal{N}\left(np\,;\sqrt{np(1-p)}\right)$

$$\boxed{P(a \leq X \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b+\frac{1}{2}-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a-\frac{1}{2}-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)}$$