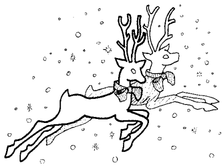


Mercredi 11 décembre 2024

PAM – MATHS

Examen de Décembre

Classe 12

5 problèmes

Nom: ______________

Total: / 54 points

Instructions: Résolvez le plus de questions possible.

Commencer par celles qui vous semblent les plus faciles…

Ne stressez pas :)

Problème 1 [/9points]

Le graphe de la solution s de l'équation différentielle

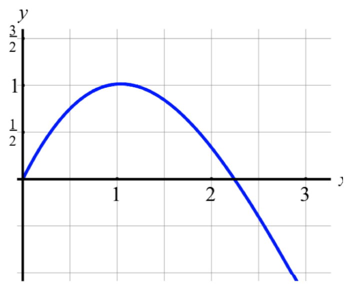
$$y' = 2\cos(x) - y$$

qui satisfait à la condition initiale

$$s(0) = 0$$

est donné ci-contre pour $x \in [0;3]$.

Remarque : x est en radians.



a) Estimer la valeur de $s(1)$ et de $s'(1)$ à l'aide de la méthode d'Euler avec un pas $h = 0.25$. Arrondir tous les résultats au centième.

b) En employant les résultats obtenus ci-dessus, expliquer pourquoi on peut supposer que le graphe de s admet un maximum d'abscisse inférieure à 1.

c) On utilise la méthode d'Euler avec un pas h inconnu.
On note e l'estimation de s' obtenue avec un seul pas.
Montrer que $e(h) = 2\cos(h) - 2h$.

Problème 2 [/7points]

On donne l'équation différentielle $y' = x - y$ et on s'intéresse à la valeur en $x = 2$ de la solution particulière s qui passe par le point $(0;1)$.

a) Calculer cette valeur $s(2)$ en résolvant l'équation différentielle.

b) Trouver une approximation de cette valeur $s(2)$ en utilisant la méthode d'Euler avec un pas $h = \frac{1}{2}$.

Problème 3 [/8points]

On donne l'équation différentielle du premier ordre $y' = x^2 + y$ et une condition initiale $y(0) = -1$, autrement dit $y = -1$ lorsque $x = 0$.
On appelle $f(x)$ la solution de l'équation qui respecte la condition initiale.

a) Par la méthode d'Euler, estimer $f(4)$ en quatre pas.
Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement les résultats obtenus en reportant et reliant les points calculés.

b) En résolvant l'équation différentielle, prouver que $f(x) = e^x - x^2 - 2x - 2$.

Problème 4 [/18points]

On donne l'équation différentielle du premier ordre $y' = \frac{y}{2x} + 1$ et on appelle s la solution de l'équation dont le graphe passe par le point $P(1;-1)$.

a) Par la méthode d'Euler, estimer $s(4)$ avec des pas de longueur 1.
Donner les résultats intermédiaires et le résultat final sous forme de fractions.

b) Montrer qu'avec la méthode d'Euler et un pas inconnu h, on obtient les estimations $s'(1+h) \cong \frac{5h+2}{4h+4}$ et $s(1+2h) \cong \frac{7h^2-4}{4h+4}$.

c) Déterminer la valeur positive du pas h pour laquelle l'estimation de $s(1+2h)$ vaut 0 et en déduire une estimation d'un zéro de s.

d) Déterminer la valeur négative du pas h pour laquelle l'estimation de $s'(1+h)$ vaut 0 et en déduire une estimation des coordonnées d'un point à tangente horizontale du graphe de s.

e) Trouver la solution générale de l'équation différentielle.

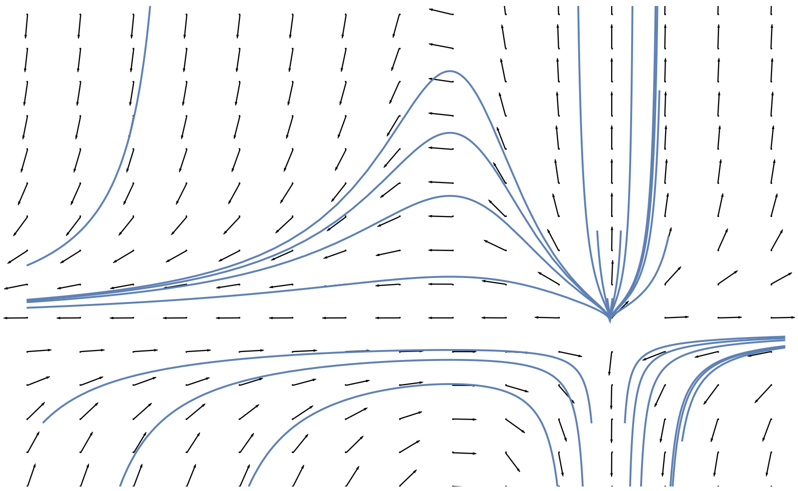
f) Prouver que $s(x) = 2x - 3\sqrt{x}$.

g) Déterminer les zéros de s, les coordonnées du point à tangente horizontale du graphe de s, puis représenter ce graphe.

Remarque pour (d) : Une valeur négative de h permet de prolonger la courbes vers la gauche du point initial .

Problème 5 [/12points]

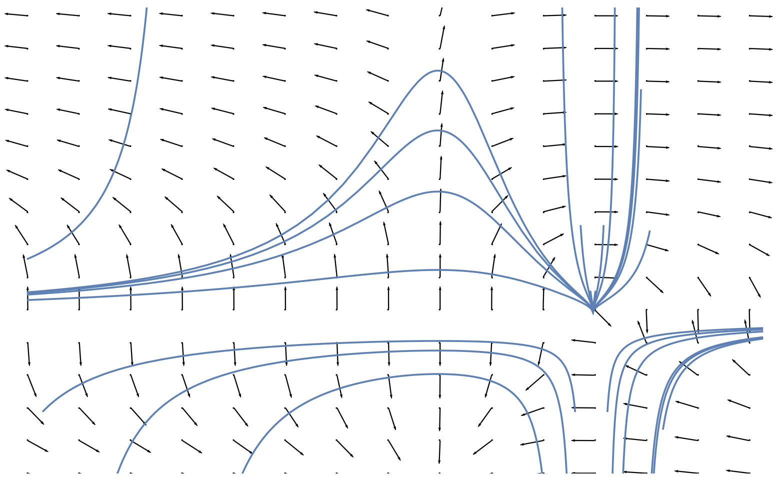
On donne le champ vectoriel $\vec{V}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x-1}{y} \\ (x+1)y \end{pmatrix}$ (défini en tout (x,y) sauf si $y=0$) représenté par la figure ci-dessous.



a) Déterminer les équations des courbes tangentes en tout point aux vecteurs du champ $\vec{V}$

b) Trouver un champ $\vec{W}(x,y)$ tel que $\vec{W}(x,y) \perp \vec{V}(x,y)$ en tout point (x,y).

La figure ci-dessous représente un tel champ $\vec{W}(x,y)$, avec les même courbes que précédement.



c) Représenter sur le dessin une des courbes orthogonales aux coubes imprimées

Trouver les équations des courbes orthogonales.

Remarque : Il est possible de prendre $\ln(|x|)$ comme primitive de $\frac{1}{x}$