MATHS 11N

Jeudi 2 Avril 2026

Durée : 3 heures

Examen de Pâques

6 Questions. Total : /85

Réponses

Question 1

[24 points]

On donne les 4 points suivants (valables pour les deux parties de cette question)

A:$(-5;-2)$, B:$(7;-2)$, P:$(7;3)$ et Q:$(5;4)$.

Partie 1

Considérons le triangle ABP (donc ayant comme sommets A,B et P)

Equation Droite AB: $y+2=0$ Droite BP: $x-7=0$ Droite AP: $5x-12y+1=0$

1) La *bissectrice* $\mathcal{B}_A$ passant par A a comme équation $\frac{y+2}{1}=\pm\frac{5x-12y+1}{13}$
$13y+26=\mp(5x-12y+1)$ en prenant $(+)$: $25y+26=(5x+1)$ donc $y=\frac{1}{5}x-1$

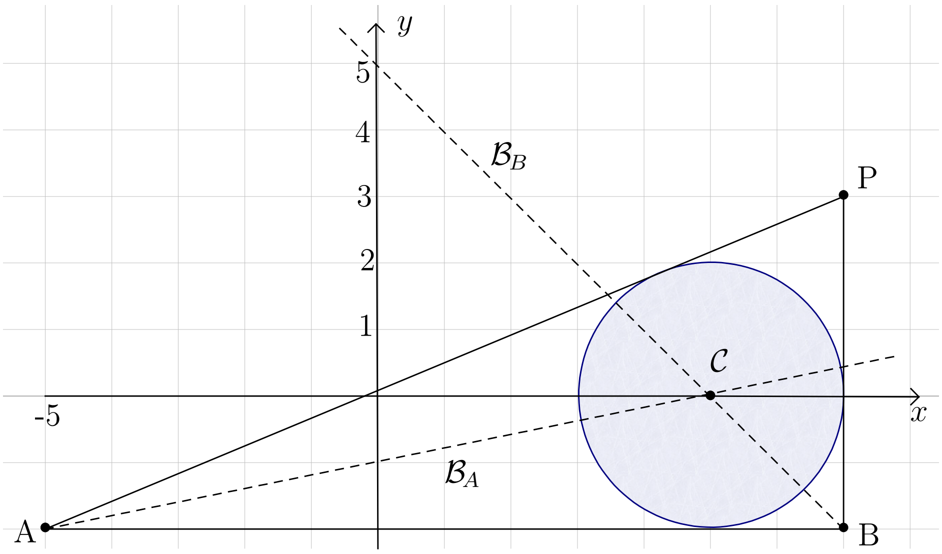
2) La *bissectrice* $\mathcal{B}_B$ du triangle passant par B. se trouve en posant $\frac{y+2}{1}=\pm\frac{x-7}{1}$

et en choisissant le signe $(-)$: $\boxed{y=-x+5}$

3) Les coordonnées de $\mathcal{C}$, centre du cercle *inscrit* du triangle ABP s'obtiennent

en résolvant : $(y=y)$ $\frac{1}{5}x-1=-x+5\Rightarrow\left(1+\frac{1}{5}\right)x=5+1\Rightarrow x=5$

et $y=-x+5=-5+5=0$ donc $\boxed{\mathcal{C}:(5,0)}$

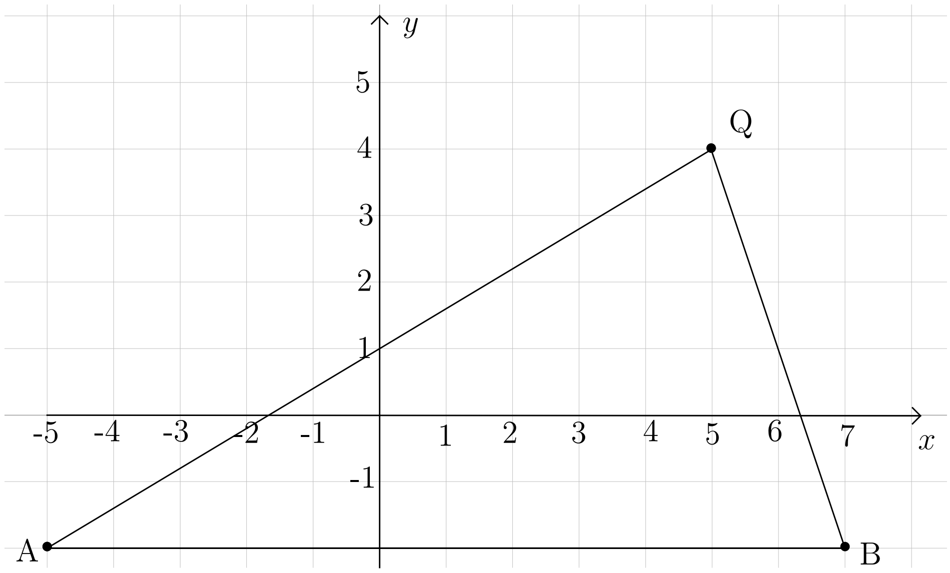


4) L'équation du cercle inscrit du triangle ABP est $\boxed{(x-5)^2+y^2=4}$

Partie 2

Nous considérons maintenant le triangle ABQ.

5) Tracer le triangle ABQ sur la figure ci-dessous .



6) $\boxed{\mathrm{AB}=12,}$ $\boxed{\mathrm{BQ}=\sqrt{2^2+6^2}=2\sqrt{10}}$ et $\boxed{\mathrm{AQ}=\sqrt{10^2+6^2}=2\sqrt{34}}$ [/3]

7) En déduire, à l'aide d'un théorème vu en cours de trigonométrie,

que le cosinus de l'angle $\widehat{\mathrm{AQB}}$ vaut $\frac{2}{\sqrt{85}}$

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{AQ}^2+\mathrm{BQ}^2-2\cdot\mathrm{AQ}\cdot\mathrm{BQ}\cos(\widehat{\mathrm{AQB}})$$

$$\cos(\widehat{\mathrm{AQB}})=\frac{144-136-40}{-2\times2\sqrt{10}\times2\sqrt{34}}=\frac{32}{8\sqrt{340}}=\frac{4}{\sqrt{340}}=\frac{2}{\sqrt{85}}$$

8) Les composantes des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{QA}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{QB}}$ sont [/2]

$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{QA}}=\begin{pmatrix}-10\\-6\end{pmatrix}}$ $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{QB}}=\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}}$

9) A l'aide de ces vecteurs, retrouver la valeur exacte du cosinus de l'angle $\widehat{\mathrm{AQB}}$. [/2]

$$\overrightarrow{\mathrm{QA}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{QB}}=\|\overrightarrow{\mathrm{QA}}\|\cdot\|\overrightarrow{\mathrm{QB}}\|\cos(\widehat{\mathrm{AQB}})$$

$$-20+36=2\sqrt{34}\cdot2\sqrt{10}\;\cos(\widehat{\mathrm{AQB}})$$

$$\cos(\widehat{\mathrm{AQB}})=\frac{16}{4\sqrt{340}}=\frac{4}{\sqrt{340}}=\frac{2}{\sqrt{85}}$$

10) Une expression exacte du sinus de l'angle $\widehat{AQB}$ s'obtient par l'identité trigonométrique $\cos^2(\widehat{AQB})+\sin^2(\widehat{AQB})=1$ [/2]

$$\Rightarrow \sin(\widehat{AQB})=\sqrt{1-\cos^2(\widehat{AQB})}$$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt{85}}\right)^2} \quad =\sqrt{1-\left(\frac{4}{85}\right)}=\sqrt{\left(\frac{85-4}{85}\right)}=\frac{9}{\sqrt{85}}$$

11) Montrer que l'*aire* du triangle ABQ vaut 36 cm^2 [/2]

$$\mathcal{A}(ABC)=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{QA}\|\cdot\|\overrightarrow{QB}\|\sin(\widehat{AQB})$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{34}\cdot 2\sqrt{10}\cdot\frac{9}{85}=2\sqrt{340}\cdot\frac{9}{85}=4\sqrt{85}\cdot\frac{9}{\sqrt{85}}=36$$

12) Compare votre dernier résultat avec l'*aire* du triangle ABP [/1]

$\mathcal{A}(ABC)=\frac{1}{2}\text{base}\cdot\text{hauteur}=\frac{1}{2}12\cdot 6=36$ donc identique !

Question 2 [20 points]

On donne les vecteurs suivants : $\vec{v}_1=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{v}_2=\begin{pmatrix}5\\-3\\2\end{pmatrix}$

1) Une équation *vectorielle* du plan $\mathcal{P}$ passant par P: $(8;12;-1)$

et *parallèle* aux deux vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$. [/5]

est $\boxed{\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2 \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\12\\-1\end{pmatrix}+\lambda_1\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}5\\-3\\2\end{pmatrix}}$

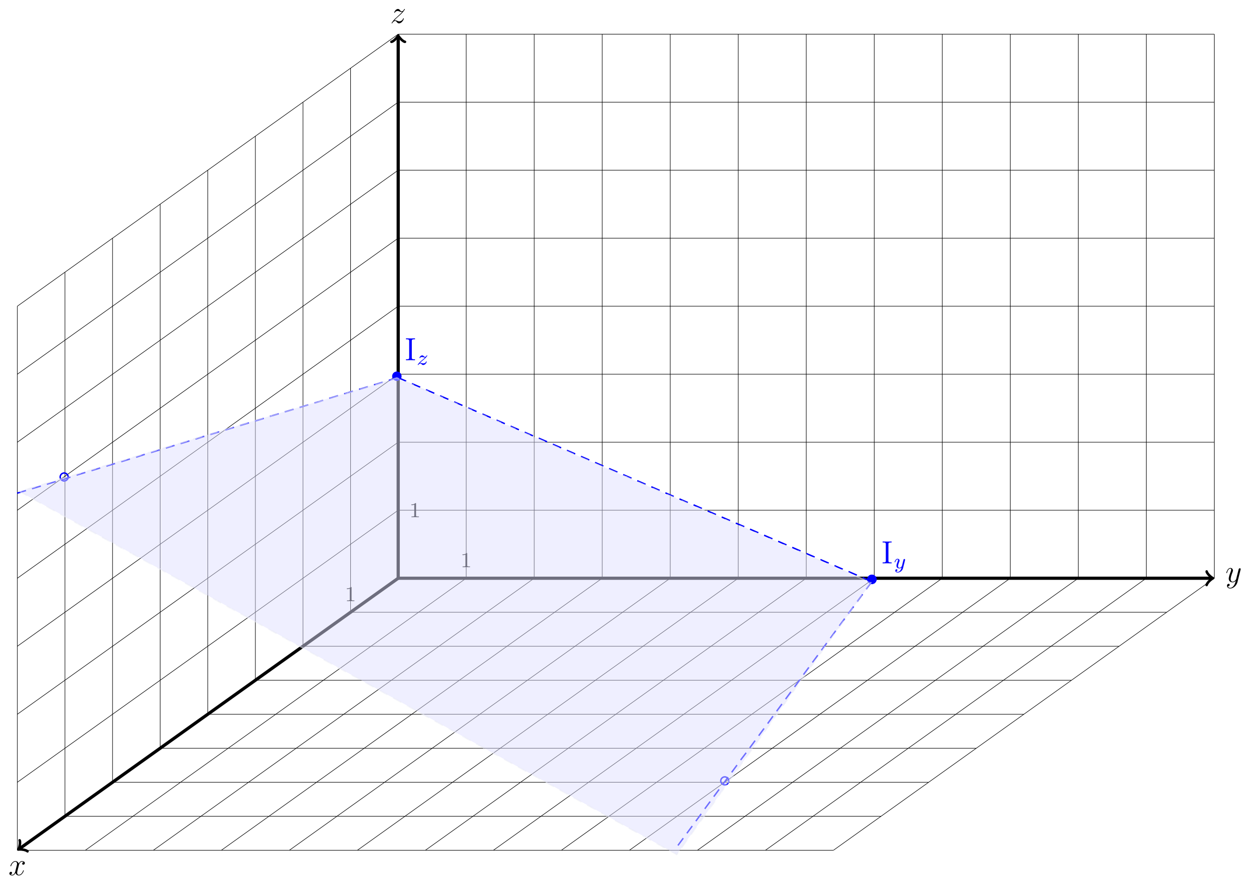
2) On en déduire l'une équation *cartésienne* de $\mathcal{P}$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=8+2\lambda_1+5\lambda_2\\y=12+3\lambda_1-3\lambda_2\\z=-1-\lambda_1+2\lambda_2\end{cases} \quad \Rightarrow\begin{cases}x+2z=6+9\lambda_2\\y+3z=10+3\lambda_2\end{cases} \quad \Rightarrow(x+2z)-3(y+3z)=-21$$ [/5]

$$\Rightarrow \boxed{x-3y-7z+21=0}$$

3) Un vecteur $\vec{n}$, normal à $\mathcal{P}$ est $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\-3\\-7\end{pmatrix}$ [/1]

4) Le dessin ci-dessous représente un repère orthogonal (O,x,y,z) de l'espace 3D



i) Si un point a comme coordonnées $y \neq 0$ ou $z \neq 0$,

alors il est forcément à une distance *non nulle* de l'axe des z. [/1]

ii) De même, le long de l'axe des y on doit avoir $x = 0$ et $z = 0$ [/1]

et le long de l'axe des z on doit avoir $x = 0$ et $y = 0$ [/1]

5) On en déduit que les coordonnées des trois points d'intersections de plan $\mathcal{P}$

avec les axes x, y et z du repère orthonormé sont [/3]

I_x: $(-21; 0; 0)$, I_y: $(0; 7; 0)$, I_z: $(0; 0; 3)$

6) Tracer sur le dessin deux de ces 3 intersections du plan avec les axes. [/3]

Explique pourquoi l'une d'entre elle ne peut pas facilement être montrée.

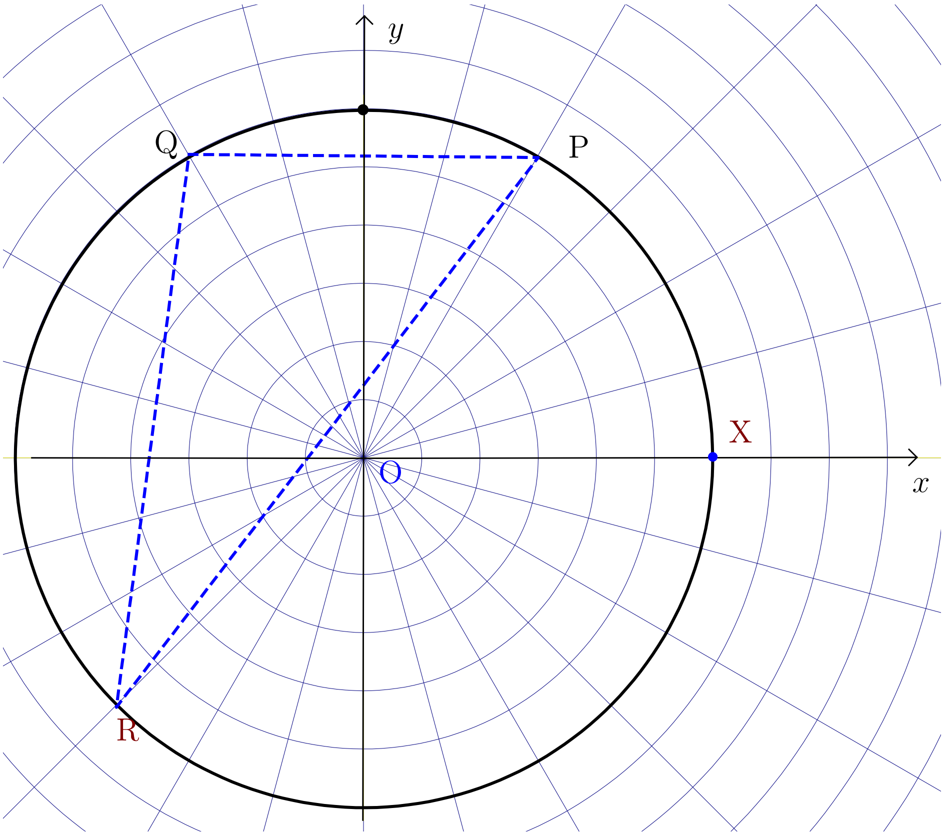
Le point I_x: se trouve à $x = -21$, donc *derrière* le plan yz.

Question 3 **[9 points]**

Dans cette question, le point X a comme coordonnées (1,0)

On considère le triangle PQR, qui a pour sommets 3 points sur le cercle trigonométrique

avec les angles donnés : $\widehat{XOP} = 60^0$ $\widehat{XOQ} = 120^0$ $\widehat{XOR} = \frac{5\pi}{4}\text{rad}$



1) Les coordonnées des trois points sont P:$\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, Q:$\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ R:$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

2) La distance entre P et Q vaut donc $\boxed{1}$

Question 4 **[13 points]**

a) Dans le repère orthonormé ci-dessous, représenter les points

$\boldsymbol{A}(2;\,0;\,4)$ et $\boldsymbol{C}(0;\,0;\,1)$. [/2]

b) Déterminer les coordonnées du point $\boldsymbol{B}$ donné dans le dessin ci-dessous et situé dans le plan $\boldsymbol{Oyz}$. $\boxed{B\colon(0,3,4)}$ [/2]

c) Considérons le plan $\boldsymbol{\alpha}$ passant par les 3 points $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{C}$. [/4+2+2 +1]

i) Une équation vectorielle de ce plan est

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \lambda_1\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \lambda_2\overrightarrow{\mathrm{AC}} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_1\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

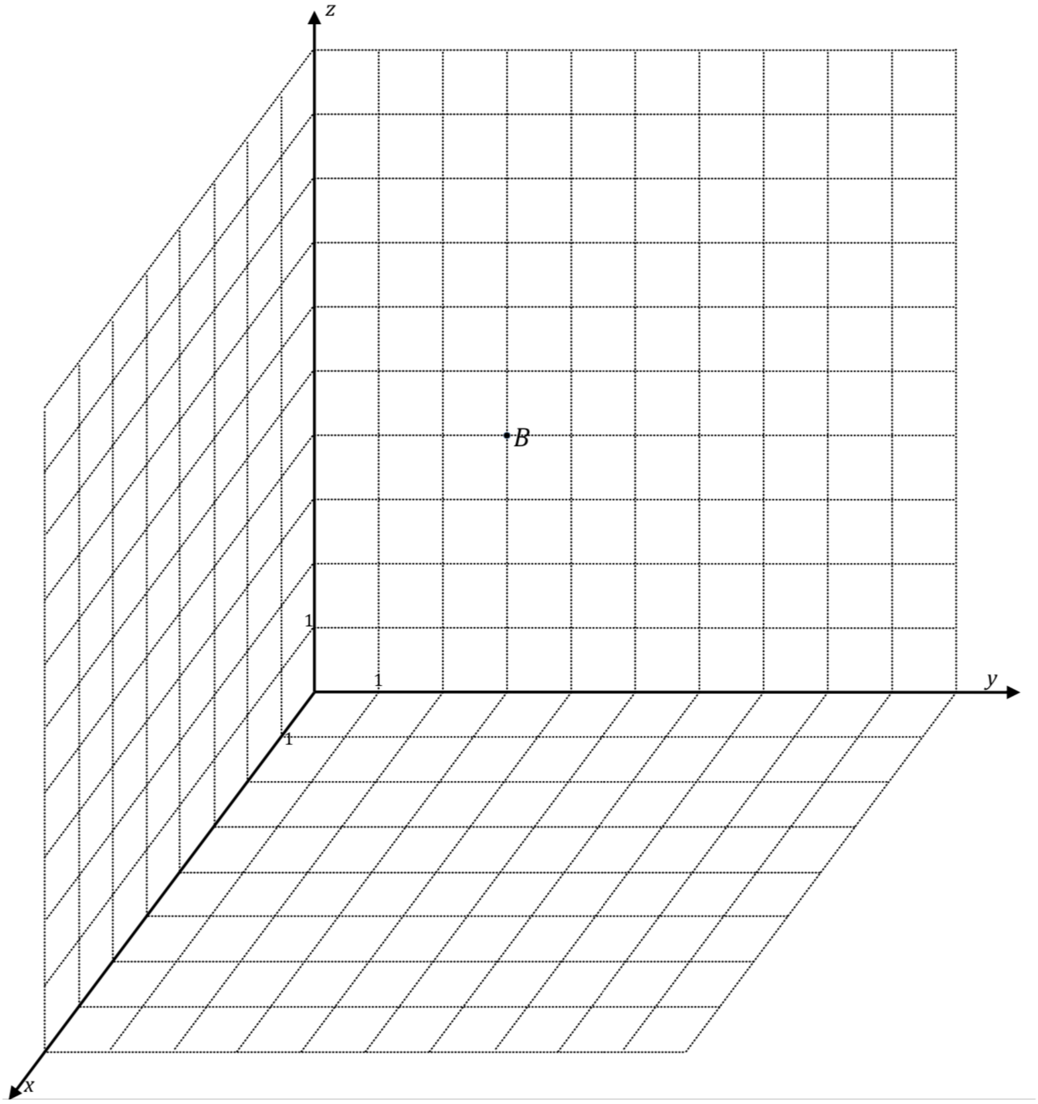
ii) Les valeurs des paramètres de l'équation (λ_1 et λ_2) pour avoir a $x=0$ et y=0

sont les solutions de $\begin{cases} 3\lambda_1=0 \\ 3-3\lambda_2=0 \end{cases}$ $\boxed{\text{donc } \lambda_1=0 \quad \text{et } \lambda_1=1}$

iii) L'intersections $\mathrm{I}_z,$ du plan avec l'axe z du repère orthonormé est $\boxed{I_z,:(0,0,1)}$

iv) Connaissant maintenant trois points du plan, vous pouvez le représenter

dans la figure ci-dessous au moyen de ses traces dans deux des 3 plans du repère.


z
y
x
1
1
1
B

Question 5

[11 points]

i) On donne les points A:$(-8;4)$ et B: $(4;-8)$ relativement au repère $\{0,x,y\}$

La droite $\mathcal{D}$ passe par A, et est parallèle à la droite d'équation $3x-4y+5=0$

$\mathcal{D}$ passe à une distance du point B égale à

$$d=\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|3(-8)-4(4)+5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|-25|}{\sqrt{25}}=\boxed{5}$$

ii) On considère le plan Π d'équation $\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\\ -2\\ 4 \end{pmatrix}+\lambda_1\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 0 \end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}$

donc $\begin{cases} x=1-\lambda_1+\lambda_2\\ y=-2+\lambda_1\\ z=4+\lambda_2 \end{cases}$ $\qquad x+y=-1+\lambda_2$ $\quad \boxed{x+y-z+5=0}$

ainsi que les points P: $(5+2\sqrt{3},-7,3)$ et Q: $(-6,3\sqrt{3}+1,\sqrt{3})$.

Les points P et Q se trouvent à *égale distance* de Π, car

$$\frac{|(5+2\sqrt{3})+(-7)-(3)+5|}{\sqrt{3}}=\frac{|(-6)+(3\sqrt{3}+1)-(\sqrt{3})+5=|}{\sqrt{3}}=2$$

[/6]

iii) Un vecteur directeur du plan est $\boxed{\tilde{v}=\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ -1 \end{pmatrix}}$

Question 6

[8 points]

1) L'angle θ, situé dans le troisième quadrant, et tel que $\cos(\theta)=-\frac{15}{17}$.

Valeurs exactes de

$$\sin(\theta)=-\frac{8}{17}$$

$$\tan(\theta)=\frac{8}{15}$$

2) L'angle γ est situé dans le premier quadrant, et $\sin(\gamma)=\frac{3}{5}$

alors $\cos(\gamma)=\frac{4}{5}$ et $\cos(\gamma-\theta)=\cos(\theta)\cos(\gamma)+\sin(\theta)\sin(\gamma)$

$$=\left(-\frac{15}{17}\right)\left(\frac{4}{5}\right)+\left(-\frac{8}{17}\right)\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$=\frac{-60-24}{85}=\boxed{\frac{-84}{85}}$$